2011 | ROČNÍK 2 | ČÍSLO 3

LOGOS POLYTECHNIKOS

VŠPJ
Vysoká škola polytechnická Jihlava

Vysoce vážení čtenáři!

V úvodním slovu ke třetímu číslu druhého ročníku odborného časopisu Vysoké školy polytechnické Jihlava se na Vás obracím jako jeho nový šéfredaktor. Po půldruhém roce ukončila svou činnost první redakce časopisu pod vedením RNDr. Jany Borůvkové, Ph.D. Odvedla kus dobré a poctivé práce a dokázala úspěšně etablovat nový odborný časopis mezi českými odbornými periodiky. Za všechnu práci a úsilí jí po právu náleží upřímné poděkování a ocenění.

Byl bych velice rád, kdyby se podařilo nové redakci dobře využít dosažených výsledků a zároveň posunout kvalitu a obsah časopisu na vyšší úroveň. S tím bude spojena řada úkolů. Jedním z nejbližších bude úspěšné dovršení úsilí o zapsání časopisu LOGOS POLYTECHNIKOS na centrálně vedený Seznam recenzovaných časopisů v České republice. Pokud vše půjde hladce a okolnosti budou příznivě nakloněny, bude nová redakce o tento zápis žádat na konci letošního roku.

Odborný časopis LOGOS POLYTECHNIKOS vznikl a dosud slouží především jako velice vhodná platforma pro prezentaci výsledků odborné a tvůrčí činnosti akademických pracovníků VŠPJ. Toto třetí číslo druhého ročníku přináší čtenářům odborné stati z oblasti aplikované matematiky, použití metod ekonomické analýzy a z okruhu problémů tzv. krizového managementu. V jednotlivých příspěvcích se tak prezentují výsledky tvůrčí činnosti pracovníků kateder matematiky, ekonomických studií a regionálního rozvoje a veřejné správy.

Tuto úlohu bude časopis plnit ve stále větší míře i v budoucnosti. Kromě toho by se však měl dle mého názoru postupně stávat i periodikem, které bude v odpovídající míře reflektovat celkový vnitřní život akademické obce (a to jak její učitelské, tak i studentské části) VŠPJ. Takovým způsobem by se totiž mohl LOGOS POLYTECHNIKOS stát velice vhodným nástrojem k důstojné prezentaci Vysoké školy polytechnické Jihlava před širokou odbornou i laickou veřejností. Nebude to úkol nikterak snadný a bude jistě znamenat i určité obsahové a formální proměny časopisu. O to více práce a úsilí bude muset nová redakce pod mým vedením vynaložit.

Doufám, že i s Vaší pomocí, vážení čtenáři, budeme schopni tento cíl zrealizovat.

Doc. PhDr. Martin Hemelík, CSc.
šéfredaktor

Equivalency Principles in Financial Mathematics

Radek Stolín

College of Polytechnics Jihlava

Abstract

Showing an alternative introduction of the basic concepts of financial mathematics is the main goal of this paper. Almost all classic courses of financial mathematics start with the concepts of different types of interest that is regarded as a reward or cost in return for lending or borrowing money. This enables introduction of other concepts such as interest rates, accumulated values, discounted values, and so on. This paper describes another way. It is possible to proceed from the well-known and obvious fact that the real value of money is changed with time and define an equivalency of two values of money due at different times. Two sorts of the equivalencies are defined, the equivalence at simple and compound interest. The former does not have transitivity property, while the later does. It sometimes leads to inconsistencies at solving financial problems based on simple interest. An example illustrates the problem in question. Further an equivalency of two sets of values is introduced each of them is due at different time. The mathematical expression of the equivalency, the so called equation of value, enables to solve various problems of financial practice. In fact, for most of the financial transactions and investments one can set up the corresponding equation of value and solve it in respect to any requested unknown. The paper shows several examples of those transactions.

Key words

Time value of money, equivalency at simple interest, equivalency at compound interest, transitivity, equation of value, focus date, internal rate of return, net premium.

Introduction

A well-known basic idea which has to be taken into account at all financial decisions – money has its time value. Everybody knows that the real value of one hundred euro today is different from one hundred euro, for example, a year ago. So each payment associated with a financial transaction should have its date, the day on which it was realized or is due, the so called maturity date. In other words, we deal with dated values. The sum of the nominal values of payments which have different maturity dates is worthless, has no meaning. We can summarize or compare only such payments that are due on the same date, which is understandably not fulfilled in practice. However, financial mathematics can cope with this problem easily using simple formulae that enable to compute a corresponding (equivalent) value of a payment to any date. It is obvious that the equivalent value should depend on the time elapsed between the real and the requested maturity date, on the original value and finally on the rate and the way of appreciation of money.

Equivalency at simple interest

Definition 1

Let $x, y, i, n \in R^+$; $t \in R$. We say that a value of money x due at a time t and a value of money y due at a time $t + n$ are mutually equivalent at simple interest if it holds:

$$y = x(1 + ni). \tag{1}$$

The quantity i is called the simple interest rate and equation (1) is sometimes called the basic equation of simple interest.

Definition 1 implies that a value x due at a given time is equivalent to the value $x(1+n_1 i)^{-1}$ due n_1 time units earlier and to the value $x(1+n_2 i)$ due n_2 time units later. The first value-forming process is referred to as the simple discounting of x and the second one as the simple accumulation of x. Figure 1 illustrates the described situation.

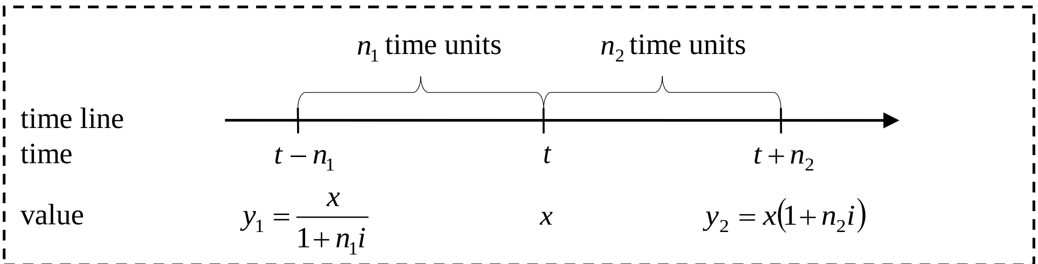


Figure 1

Example 1

A debt of a nominal value of €50 000 is due in a half of year. Find

a) its present value;

b) its value nine months from now

at 6% p.a. simple interest.

Solution

Let time be measured in years from present. At the notation by Figure 1 we have x = 50 000, i = 0.06, $n_1 = \frac{1}{2}$, $n_2 = \frac{3}{12}$.

a) $y_1 = \dfrac{x}{1+n_1 i} = \dfrac{50\ 000}{1+\frac{1}{2}0.06} = 48\ 543.69;$

b) $y_2 = x(1+n_2 i) = 50\ 000\left(1+\dfrac{3}{12}0.06\right) = 50\ 750.$

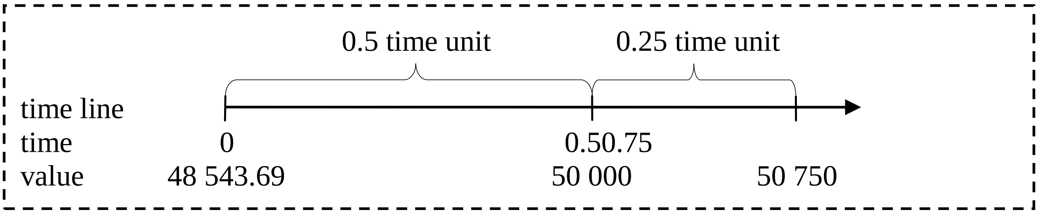


Figure 2

On the given terms the amount of €50 000 due in a half of year is equivalent at simple interest to the amount of €48 543.69 due now and vice versa. The amount of €50 000 due in a half of year and the amount of €50 750 due in three quarters of year are also mutually equivalent at simple interest.

We are naturally interested in answering the following question. Is there the equivalency at simple interest between the amount of €48 543.69 and the amount of €50 750 due by three quarters of year later on the given terms? If so, it should hold by Definition 1 (see also both figures) that

$$y_2 = y_1[1+(n_1+n_2)i].$$

We have

$$y_1[1+(n_1+n_2)i] = 48\ 543.69\left[1+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{12}\right)0.06\right] = 50\ 728.16 \neq 50\ 750 = y_2.$$

We can easily prove that the difference Δ makes

$$\Delta = y_1 n_1 n_2 i$$

in general. Hence it is obvious that an amount y_1 is not equivalent at simple interest to y_2. Thus the relation "to be equivalent at simple interest" is not transitive, which has some troublesome consequences.

Equivalency at compound interest

Definition 2

Let $x, y, i, n \in R^+$; $t \in R$. We say that a value of money x due at a time t and a value of money y due at a time $t+n$ are mutually equivalent at compound interest if it holds:

$$y = x(1+i)^n. \tag{2}$$

The quantity i is called the compound interest rate and equation (2) is sometimes called the basic equation of compound interest.

Definition 2 implies that a value x due at a given time is equivalent to the value $x(1+i)^{-n_1}$ due n_1 time units earlier and to the value $x(1+i)^{n_2}$ due n_2 time units later.

The first value-forming process is referred to as the compound discounting of x and the second one as the compound accumulation of x. Figure 3 shows the described situation.

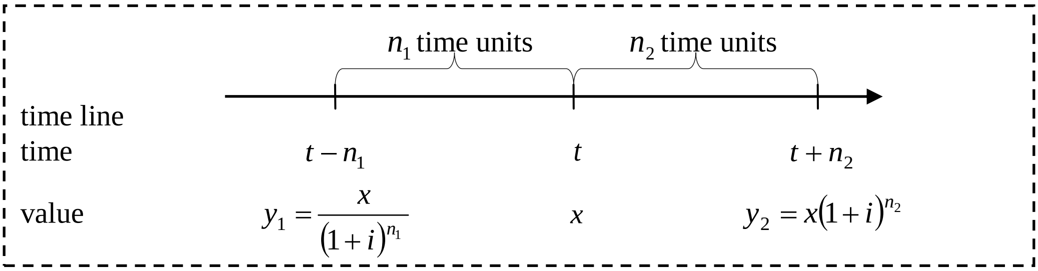


Figure 3

Example 2
We have €100 now. Find out the value of money equivalent at compound interest to that value

a) a half of year ago;
b) in two years' time,

if money is compounded at 5% p.a.

Solution
Let time be measured from now in years (in respect to the given interest rate that is compounded yearly). At the notation by Figure 3 we have x = 100, $i = 0.05$, $n_1 = \frac{1}{2}$, $n_2 = 2$.

a) $y_1 = \frac{x}{(1+i)^{n_1}} = \frac{100}{(1+0.05)^{0.5}} = 97.59$;

b) $y_2 = x(1+i)^{n_2} = 100(1+0.05)^2 = 110.25$.

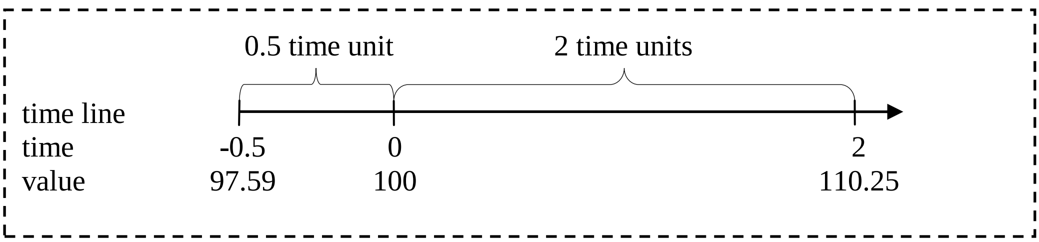


Figure 4

On the given terms the amount of €100 due now is equivalent at compound interest to the amount of €97.59 due a half year ago and vice versa. The amount of €100 due now and the amount of €110.25 due in two years are also mutually equivalent at compound interest.

Similarly as before the transitivity property of equivalence at compound interest is what we are interested in. There is a chance if on the given terms the value of €97.59 and of €110.25 due two and a half years later are equivalent at compound interest. If so, it should hold by Definition 2 that

$$y_2 = y_1(1+i)^{n_1+n_2}.$$

We have

$$y_1(1+i)^{n_1+n_2} = 97.59(1+0,05)^{2+0.5} = 110.25 = y_2.$$

Hence it is obvious the amount y_1 is equivalent at compound interest to y_2. Thus the relation "to be equivalent at compound interest" could be transitive. We will try to prove it generally.

Definition 3 (Transitivity)
A binary relation *R*over a set *S* is called transitive if it holds:

$$\forall x,\ y,\ z \in S; \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz. \tag{3}$$

Theorem 1
Equivalency at compound interest is transitive.

Proof
Let $x,\ y,\ z,\ n_1,\ n_2,\ i \in R^+$. Let i be a compound interest rate per a time unit applied. Further let x be a value of money due at a time $t \in R, y$ be a value of money due at a time $t + n_1 \in R$ and z be a value due of money at a time $t + n_1 + n_2 \in R,$ see Figure 5.

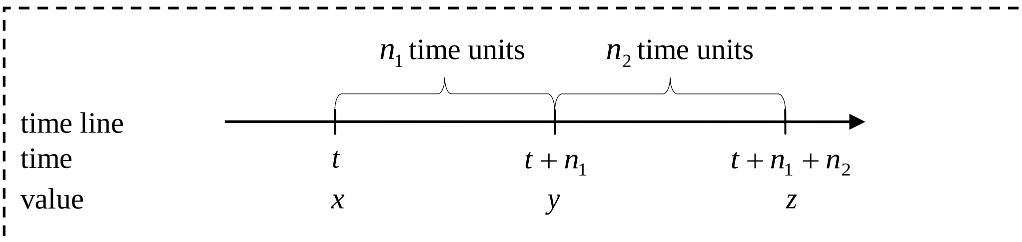


Figure 5

By Definition 2 can be assumed that

$$y = x(1+i)^{n_1} \quad \text{and} \quad z = y(1+i)^{n_2}.$$

Hence

$$z = y(1+i)^{n_2} = x(1+i)^{n_1}(1+i)^{n_2} = x(1+i)^{n_1+n_2}.$$

Thus a value of money x due at a time t is equivalent at compound interest to a value of money z due at a time $t + n_1 + n_2$ which have been requested to prove (see (3)).

There are naturally other ways of appreciation of money in financial mathematics. For example, there is a way called combined interest, which is in fact a combination of the sooner described compound and simple interest. Another way of appreciation of money is the so called continuous interest. We could similarly define equivalencies at combined and continuous interest and prove whether they have transitivity property or not. But neither of those ways is of such importance in solving the practical financial problems where more than one payment is involved. Therefore we will further deal with simple or compound interest only.

Equation of value

We can easily generalize the defined equivalencies between two values of money for two sets of values of money.

Definition 4

Let $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $V = \{v_1, v_2, ..., v_l\}$, $k, l \in N$ be two sets of dated values of moneyand i be a given simple (compound) interest rate per a time unit applied. We say that these sets are mutually equivalent at simple (compound) interest at a time $t$if it holds

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = \sum_{j=1}^{l} w_j , \tag{4}$$

where $y_1, y_2, ..., y_k, w_1, w_2, ..., w_l$ denotegradually the values of money equivalent at the simple (compound) interest to the given dated values of money at the time t. Equation (4) is called the equation of value at simple (compound) interest at the time t and the time t is called the focal date.

A lot of important problems in financial mathematics, when simple or compound interest is involved, is possible to solve using the equation of value. In fact, for each financial transaction some payments are connected with, we can set up a corresponding equation of value and solve it to a requested unknown.

Using equation of value at simple interest

In problems based on simple interest answers obtained by applying of the equation of value vary slightly with the location of the focal date as a consequence of the equivalence at simple interest has not the transitivity property. The agreement of both parties involved in such transactions on the location of the focal date is therefore very important.

Example 3

You borrowed €1 500 seven months ago, €2 000 five months ago and €1 000 three months ago. Find what single payment made in two months' time will liquidate all these debts if money is worth 8% p.a. on the base of simple interest.

Solution

We are supposed to find the size of a single payment of x (this time the only element of the set X) due at the given time that is equivalent at simple interest at the annual simple interest rate $i = 0.08$ to the set of payments $v_1 = 1\,500$, $v_2 = 2\,000$, $v_3 = 1\,000$ that are due at the given times. If time is measured in years from the first loan was made and the focal date is at the time of the requested payment (two months from now, thus $t = \frac{9}{12}$), we have $n_{v1} = \frac{9}{12}$, $n_{v2} = \frac{7}{12}$, $n_{v3} = \frac{5}{12}$, $n_x = 0$ and each obligation is accumulated, see Figure 6.

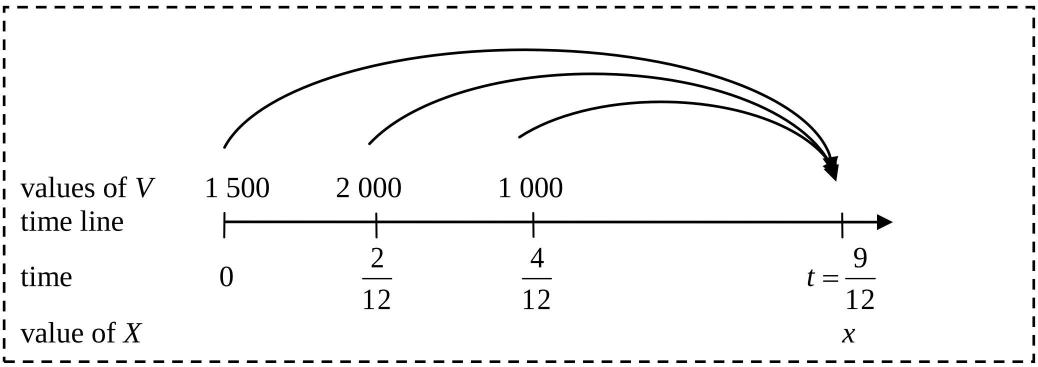


Figure 6

Equation of value (4) can by expressed as follows

$$x = \sum_{j=1}^{3} v_j \left(1 + n_j\, i\right).$$

Hence

$$x = 1\,500\left(1 + \frac{9}{12}0.08\right) + 2\,000\left(1 + \frac{7}{12}0.08\right) + 1\,000\left(1 + \frac{5}{12}0.08\right) =$$
$$= 1\,590 + 2\,093.33 + 1\,033.33 = 4\,716.67.$$

The amount of €4 716.67 pays off all three obligations in two months' time.

Let us calculate once more provided that the focal date is chosen at time $t = 0$ (see Figure 7).

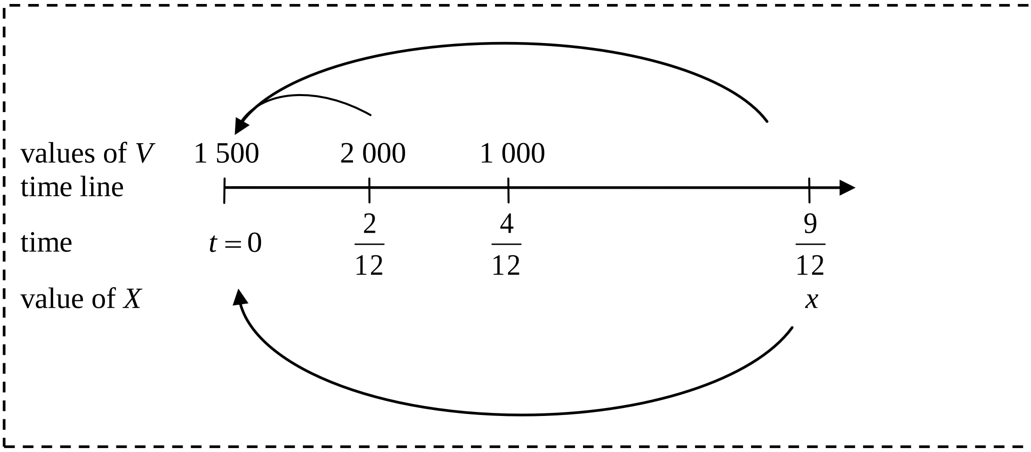


Figure 7

The equation of value is in form

$$\frac{x}{1+\frac{9}{12}0.08}=1\,500+\frac{2\,000}{1+\frac{2}{12}0.08}+\frac{1\,000}{1+\frac{4}{12}0.08}.$$

Hence

$$\begin{aligned}0.94x &= 1\,500+1\,973.68+974.03\\ x &= 4\,714.57.\end{aligned}$$

This time the answer is €4 714.57, which makes by more than €2 less than before.

There is another consequence of non-transitivity of the equivalency at simple interest that arises in practice for instance at the so called short-term instalment buying. This is considerably widespread not only in the Czech Republic nowadays and from the buyer's point of view it is useful to find the corresponding simple interest rate from the given cash flows associated with the hire purchase. We can obtain the requested simple interest rate by solving appropriate equation of value but get different answers at various focal dates. When comparing different offers it is thus important to choose the same focal date.

Using equation of value at compound interest

At compound interest the answers obtained by applying of the equation of value are independent on the location of the focal date as a consequence of Theorem 1. Thus the focal date may be chosen arbitrarily; the answers are still the same. This fact along with world widespread applying of compound interest especially on medium-term and long-term transactions (mostly longer than one year) give much broader possibilities of applications.

Example 4
Students of a certain class of a Czech secondary school had agreed that each of them paid an amount of 10 CZK into a fund that was deposited on a savings account at the end of each school month (four years from September up to June). They plan to use the accumulated amount for a party after passing their final exam. The account pays compound interest at a rate of 4.4% p.a. compounded monthly. How much money will be available to them if in the first year there were 40 students in the class, 38 students in the second one, 35 students in the third one and 34 students in their final year and the withdrawal will be made at the end of June their final year?

Solution
Let time be measured from a month before the first payment on the account was realized in months and the focal date be at time the withdrawal, see Figure 8.

value of V															v
time	0	1		10	11	12	13		22	23	24	25			$t=46$
values of X		400	…	400	0	0	380	…	380	0	0	350	…	…	340

Figure 8

The equation of value has the following form

$$\sum_{j=36}^{45} 400\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j + \sum_{j=24}^{33} 380\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j +$$
$$+\sum_{j=12}^{21} 350\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j + \sum_{j=0}^{9} 340\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j = v.$$

Hence

$$v = 400\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^{36}\sum_{j=0}^{9}\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j + 380\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^{24}\sum_{j=0}^{9}\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j +$$
$$+350\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^{12}\sum_{j=0}^{9}\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j + 340\sum_{j=0}^{9}\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j =$$
$$=(456.33+414.89+365.71+340)\sum_{j=0}^{9}\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j = 1\,576.94\sum_{j=0}^{9}\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^j.$$

Using the known formula of the sum of the first n terms of a geometric progression, we obtain

$$v = 1\ 576.94\frac{\left(1+\frac{0.044}{12}\right)^{10}-1}{1+\frac{0.044}{12}-1} = 16\ 032.12.$$

The students will be able to withdraw 16 032.12 CZK.

Equation of value (4) can be successfully applied to solving various problems concerning any financial transaction that consists of outlays and incomes. In this case all outlays associated with the transaction are considered as one set of payments (say *V*), and all incomes associated with the transaction are considered as the other set of payments (*X*). The corresponding compound interest rate per one time unit is called the yield of investment or the internal rate of return of the investment. The focal date is usually located at the time of the first payment associated with the investment, so all payments (so called cash flows) associated with the investment are discounted.

Example 5

A property owner wants to recondition an old well in his garden in order not to have to pay for supply of water. He expects the expense for reconditioning will make 12 000 CZK. Further he expects annual operating costs of an amount of 500 CZK due at the end of each year when the well is in operation increasing every year at rate 5%. He estimates that he will save yearly 3 000 CZK (a charge for water supply) increasing every year at rate 5% as well. Is the investment profitable for the owner if he can deposit his money into a savings account that pays interest rate of 8% p.a. and if he expects that the well will be in run without any other outlays for ten years?

Solution

Let time be measured in years understandably from the time of the recondition and the focal date be at the same time. The cash flows are going to be as on Figure 9.

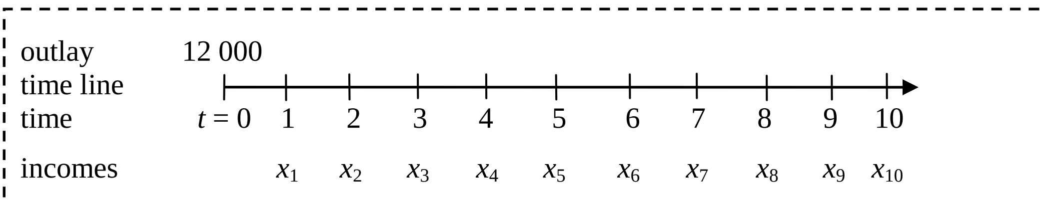


Figure 9

where

$$x_j = (3\ 000 - 500)(1+0.05)^{j-1}.$$

We have eventually (rounded to nearest crown)

$$x_1 = 2\ 500;\quad x_2 = 2\ 625;\quad x_3 = 2\ 756;\quad x_4 = 2\ 894;\quad x_5 = 3\ 039;$$
$$x_6 = 3\ 191;\quad x_7 = 3\ 350;\quad x_8 = 3\ 518;\quad x_9 = 3\ 694;\quad x_{10} = 3\ 878.$$

The equation of value can be written as

$$\frac{2\,500}{1+IRR}+\frac{2\,625}{(1+IRR)^2}+\frac{2\,756}{(1+IRR)^3}+\frac{2\,894}{(1+IRR)^4}+$$
$$+\frac{3\,039}{(1+IRR)^5}+\frac{3\,191}{(1+IRR)^6}+\frac{3\,350}{(1+IRR)^7}+\frac{3\,518}{(1+IRR)^8}+$$
$$+\frac{3\,694}{(1+IRR)^9}+\frac{3\,878}{(1+IRR)^{10}}=12\,000.$$

The requested root *IRR* = 0.206 3. So the investment is profitable, because it will bear the annual interest rate of 20.36%, which is obviously more than 8%.

Calculation of insurance premium proceeds from the assumption there is a balance (an equivalency) between outlays and incomes of an insurer. In other words, we can obtain the requested premium by solving the corresponding equation of value. Unfortunately we have to take into account one more feature. The cash flows associating with the transaction are of stochastic nature. This implies it is necessary to count with expected values of those cash flows.

Example 6
A man aged 46 would like to settle a five-year pure endowment insurance policy. What is the relevant net premium he has to pay at the start of each year if he requires to be paid a benefit of 1 000 000 CZK considering a technical rate of 2.4% p.a.?

Solution
Let time be measured in years from the time the policy is settled and the focal date be at the same time. The cash flows are going to be as on Figure 10,

outlay						1 000 000 p_5
time line						
time	$t = 0$	1	2	3	4	5
incomes	p_0x	p_1x	$p_2\,x$	p_3x	p_4x	

Figure 10

where

$$p_0=1,\;\; p_1=0.997,\;\; p_2=0.993,\;\; p_3=0.988,\;\; p_4=0.983,\quad p_5=0.979$$

are the probabilities of the realization of the corresponding payments computed according to the mortality tables for Czech men 2009 (see [1]). Using equation of value (4) we have

$$x+\frac{0.997}{1.024}x+\frac{0.993}{1.024^2}x+\frac{0.988}{1.024^3}x+\frac{0.983}{1.024^4}x=\frac{1000\,000\cdot 0.979}{1.024^5}.$$

Hence

$$x = 183\ 437.96.$$

The net yearly premium makes 183 437.96 CZK.

Conclusions

From the paper it is obvious that there is an alternative way for an introduction of basic concepts of financial mathematics. This way leads fast and directly to solving a good deal of financial problems and situations which typically arise in practice. Moreover, this sort of introduction explains some ambiguous results that are obtained at solving some financial problems when simple interest is involved. Explanation of that using the classic means is often very complicated and for students hardly understandable.

The described way of the introduction enables as well very effective preparation of mathematical fundamentals for studies of insurance mathematics, because calculation of insurance premiums is one of the crucial problems insurance mathematics deals with.

Literatura

[1] Český statistický úřad [cit. 2011-04-27]. Dostupné z WWW: <http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky>.

[2] Zima, P., Brown, R.L.: *Schaum's Outline of Theory and Problems of Mathematics of Finance*.McGraw-Hill, New York 1996. ISBN 0-07-008203-0.

Kontaktní údaje

RNDr. Radek Stolín, Ph.D.
Katedra matematiky VŠPJ
Tolstého 16, 586 01 Jihlava
stolin@vspj.cz

A Few Words about Fuzzy Sets and Fuzzy Linear Programming

Marie Hojdarová

College of Polytechnics Jihlava - Department of Mathematics

Abstract

The aim of this article is not to present absolutely new things, but to introduce notion „fuzzy set" and basic operations with these sets to the readers. The article introduces the definition and properties of the sets and shows their use in linear programming. Fuzzy logic, which uses the whole interval < 0,1> for the degree of membership to the set, where the certainty of belonging to the set is only a special case of the membership degree, gives wider opportunities to precise methods of solving a problem given on the base of vague perception with respect to formulation of the problem. Mathematical processing of this subjective uncertainty opens a wide application sphere for fuzzy sets and systems. Data coming out of fuzzy systems are general, with not precisely set boundaries. Examples of such systems are social and economic systems, diagnostic systems and human perception.

Key words

Fuzzy set, fuzzy set representation, operations with fuzzy sets, fuzzy interval, fuzzy number, fuzzy linear programming.

Introduction

Motto:
So far the laws of mathematics refer to reality, they are not certain. And so far as they are certain, they do not refer to reality. *(Albert Einstein)*

Fuzzy modelling, which is also called fuzzy logic, (though it is something a little bit different from the conventional Boolean logic), is becoming one of the most successful device for developing sofisticated control systems, see [1], [2], [3]. The reason is quite simple. Fuzzy logic processes situations coming out with people's decisions and is able to precise solutions from both precise and vague information.

It fills an unnegligible gap in engineering methods, which have processed either only precise or only stochastic information so far, because it formulates uncertainty and inaccuracy with a purely mathematical and logical alghoritmic approach.

While the other approaches need precise equations for modelling of the real behaviour, fuzzy logic operates with formulations that are not amenable to precise definition or precise measurement. It provides both intuitive methods for describing systems with vague common words and transforming these specifications into effective models.

Some examples of fuzzy systems in daily life are fuzzy washing machine, fuzzy camera and fuzzy microwave oven.

Let us have a „fuzzy“ washing-machine for example. It is a product which declares fuzzy logic in its monitoring system. You fill it up, switch it on, and the washing-machine starts to choose the best regime by itself. There is a system inside which evaluates the amount of linen and its dirtiness instead of the man and chooses the right amount of detergent and the time of washing in appropriate regimes.

„Fuzzy“ microwave oven – you switch on one button and it works at the right temperature for the right time. The built-in system evaluates the filling similarly to human evaluation and then it chooses an appropriate regime and the right operation time.

„Fuzzy“ camera Minolta focuses automatically – the system reacts to the amount of light and evaluates it in the same way as photographers do – then it sets the time of light exposure properly.

And there are many other examples, see [7], [8].

Last but not least it is necessary to stress that the uncertainty modelled by fuzzy sets is different from uncertainty modelled by probability. Probability describes objective uncertainty obtained on the base of a high number of observations. Fuzzy logic describes subjective uncertainty without any possibility of repeating events. Fuzzy attributes deal with the rate of existence of the property.

Conventional logic which works with only two values 0 and 1 is very often not adequate for describing human perception and decisions. Fuzzy logic uses the whole interval $< 0,1 >$ to describe this process. Therefore fuzzy set is a set with no precise boundary – the membership to the set is given by a certain rate which can vary, see also [3].

The fuzzy set theory was originated by L. A. Zadeh in 1965 and has rapidly grown since.

Fuzzy sets and their basic properties

Set $A \subset X$, where X is a universe, may be described in various ways. One of them is description by characteristic function, see [1], [2], [3].

$$\mu_A : \quad X \to \{0,1\} \ , \quad \text{where } \mu_A(X) = \begin{cases} 1 \ \ for \ \ x \in A \\ 0 \ \ for \ \ x \notin A \end{cases}.$$

The set is unique and there is

$$A = \{x \in X;\, \mu(A) = 1\} \quad \text{or} \quad A = \{x \in X;\, \mu(A) > 0\}.$$

Sets are represented this way in computers as well.

We can also introduce a symbol for inversion μ_A^{-1} where set of values *M* $M \subseteq \{0,1\}$ corresponds with the elements of the domain *A.*

The characteristic function defined this way can be generalized to a function which will have more values in the interval $< 0,1 >$.

Fuzzy set $A \subset X$ is then described by characteristic function

$\mu_A : X \rightarrow < 0,1 >$. This function is called **a membership function.**

For every element $x \in X$, values of $\mu_A((x) \in <0,1>$ determine the membership degrees of the elements in fuzzy set *A*, (it says to which extent a single element has the property which determines its membership in the set).

A set, where the range of $\mu(A)$ consists only of values 0 and 1 is then a special case of fuzzy sets – a set with the crisp boundary – a normal set, where we can decide about any element whether it lies in the set or not.. These sets are called **crisp fuzzy sets.**

All fuzzy sets on *X* will be denoted $F(X)$.

The range of fuzzy set *A* is

$Range(A) = \{\alpha \in < 0,1 > : \exists x \in X;\ \mu(A) = \alpha\}$ and

The height is $h(A) = \sup Range(A)$.

If the height of *A* is 1, it means there exists an element in *A* for which is $\mu(A) = 1$ (the element belongs to *A* for 100%), the set is called **normal.** On the contrary it is called **subnormal.**

The support is a crisp set

$Supp(A) = \{x \in X;\ \mu_A(X) > 0\}$, and hence $Supp(A) = \mu_A^{-1}((0,1>)$.

The core is a crisp set

$core(A) = \{x \in X; \mu(A) = 1\}$.

It is obvious that *core (A)* with subnormal sets is an empty set.

Every fuzzy set can be described by its membership function.

Let us have for instance the real number „approximately eight“. Its membership function can be

$$\mu_A(x) = \left\{ \frac{x-5}{3} \ for\ x \in < 5,8 >, \frac{11-x}{3} \ for\ x \in < 8,11 >,\ 0\ otherwise \right\}$$

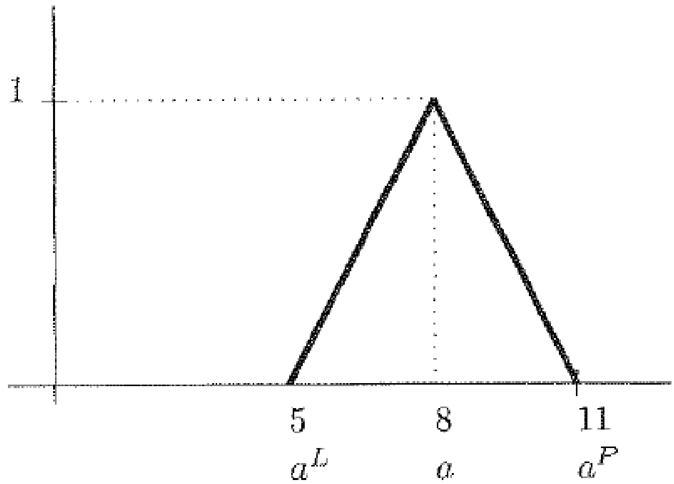


Figure 1: The membership function of fuzzy number „approximately eight"

Fuzzy sets can be described with the help of cuts.

Let us define $\alpha -$ level of fuzzy set A as

$\mu_A^{-1}(x) = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\}.$

then α - cut is

$$A_\alpha = \mu_A^{-1}(<\alpha, 1>) = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (1)$$

If the inequality in relation (1) is sharp, the cut is also called sharp.

Description of fuzzy sets by cuts is called **horizontal representation** and description by a membership function is called **vertical representation** of a fuzzy set, see [3].

For instance the real number „approximately eight" is in the horizontal representation

$A_\alpha = \{R \; for \; \alpha = 0; <5 + 3\alpha, 11 - 3\alpha> \; for \; \alpha \in (0,1>\}$

For fuzzy sets we define ordinary logic and set operations – it is necessary to emphasize that the membership degree of the point $x \in X$ in the operation result depends only on membership degrees of operands.

Here are some examples, see [3], [8]:

Equality of fuzzy sets: $A = B$, if $\forall x \in X$; $\mu_A(x) = \mu_B(x)$

Inclusion of fuzzy sets: $A \subseteq B$, if $\forall x \in X$; $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

It is possible to show that $A \leq B$ is equivalent to $\forall \alpha \in <0,1>$ is $A_\alpha \leq B_\alpha$.

Fuzzy Sets Intersection: $A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x); x \in X\}$

Fuzzy Sets Union: $A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x); x \in X\}$

Fuzzy Sets Complement: $CA \Leftrightarrow \mu_{CA}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Other important notions are fuzzy intervals and fuzzy numbers.

Let us have fuzzy set $A \subset R$.

If A_α are convex and closed (closed intervals) for $\forall \alpha \in < 0,1 >$, and further they are normal (there exists at least one $x_0 \in R$ that $\mu(x_0) = 1$), then A is called **fuzzy interval.**

If there exists only one $x_0 \in R$, for which is $\mu_A(x_0) = 1$, then A is called **fuzzy number.**

Membership functions of fuzzy numbers can have graphs of different shapes. The fuzzy set in Figure 1 is a fuzzy number, which is called **triangular fuzzy number**.

With operations for fuzzy numbers we use so called the principle of fuzzification which enables to extend

1) algebraic operations to fuzzy sets,

2) real functions of real variables to fuzzy functions with fuzzy variables,

3) crisp notions to fuzzy notions (limit, derivative, integral, etc.) see [3], [5].

The typical example can be adition and multiplication of fuzzy numbers, where we also obtain fuzzy numbers as a result of the operation. (It is not true with division).

It is defined as follows:

Let us have fuzzy numbers M and N, $\alpha \in < 0,1 >$, $M_\alpha = < a_\alpha, b_\alpha >$,

$N_\alpha = < c_\alpha, d_\alpha >$ are $\alpha -$cuts. Then S is defined by its cuts as $S_\alpha = < a_\alpha +$

$c_\alpha, b_\alpha + d_\alpha >$ and multiplication $P = M \cdot N$ is

$P_\alpha = < a_\alpha \cdot c_\alpha, \ b_\alpha \cdot d_\alpha >$.

Fuzzy sets in linear programming

Now let us introduce the concept of interval and fuzzy linear programming, where profit or technological coefficients, resp. coefficients of right sides, are uncertain or inaccurate values which we are going to model with the help of intervals or fuzzy numbers, see [5], [7]. As a model example we will have one-phase LP task, where we consider two products *A* a *B* to be manufactured by two processes *P1* and *P2*. The unit processing resources for manufacturing a batch of product *A* we denote a_{1A}, a_{2A}, and moreover a_{1B}, a_{2B} are the unit processsing resources for manufacturing a batch of product *B*. Let b_1, b_2 be total resources for *P1*, *P2* and c_A, c_B be profit rates of *A* and *B* respectively. Then we can formulate the given problem as follows:

Maximize $z = c_A x_1 + c_B x_2$ (objective function of total profit),

subject to

$a_{1A} x_1 + a_{2A} x_2 \le b_1$ (constraints – restrictions of resources)

$a_{1B} x_1 + a_{2B} x_2 \le b_2$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$ (conditions of nonnegativity)

For demonstration we will consider such a problem with concrete numbers:

Maximize $z = 3x_1 + 4x_2$

subject to $x_1 + x_2 \le 11$

$3x_1 + x_2 \le 21$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2$

Let optimal solution be denoted z^*.

We can easily obtain both grafically and by simplex alghoritm $x_1^* = 5,\quad x_2^* = 6 \quad a \quad z^* = 39.$

As the coefficients in LP problems are often more or less approximate (they depend on many changeable factors which are usually not included in the formulation of the problem), we try to make lower and upper estimates of the coefficients and thus we obtain the coefficients in the form of intervals. If a coefficient is known exactly, then the interval is a singleton, e.g. [3;3] = 3. Then the modification of the LP problem is:

$z = < 2, 4 > \cdot\, x_1 + < 3, 5 > \cdot\, x_2$

subject to $< 1, 3 > \cdot\, x_1 + < 1, 1 > \cdot\, x_2 \le < 9, 13 >$

$< 3, 9 > \cdot\, x_1 + < 1, 1 > \cdot\, x_2 \le < 20, 22 >.$

Using the natural arithmetic operations with intervals, e.g.

$< 2, 4 > \cdot x_1 + < 3{,}5 > \cdot x_2 = < 2x_1 + 3x_2, 4x_1 + 5x_2 >$

the problem can be formulated as follows:

Maximize z = $< 2x_1 + 3x_2, 4x_1 + 5x_2 >$

subject to $< x_1 + x_2, 3x_1 + x_2 > \leq < 9, 13 >$

$$< 3x_1 + x_2, 9x_1 + x_2 > \leq < 20, 22 >, \; x_j \geq 0, \; j = 1{,}2 .$$

There is a question how to interpret maximization of the interval and how to understand inequality relation between two intervals.

The question can be answered from two different perspectives – pessimistic or optimistic.

Optimistic maximization (o-maximization) of an interval function

$z(x) = < z^L(x), z^P(x) >$,

where for $z^L(x), z^P(x)$ is $z^L(x) \leq z^P(x)$ for all $x \in R,$ means

maximizing $z^P(x)$ and **pessimistic maximization (p-maximization)** of an interval function means maximizing $z^L(x)$.

Let $< a^L, a^P >, < b^L, b^P >$ be intervals.

We say that $< a^L, a^P >$ is pessimistically less-or-equal $< b^L, b^P >$

if for every $t \in < a^L, a^P >$ and for every $s \in < b^L, b^P > : \; t \leq s.$

We write $< a^L, a^P > \leq_p < b^L, b^P >.$

We say that $< a^L, a^P >$ is optimistically less-or-equal $< b^L, b^P >$ if there exists $t \in < a^L, a^P >$ and $s \in < b^L, b^P > : \; t \leq s$.

We write $< a^L, a^P > \leq_o < b^L, b^P >.$

We can obviously derive from above that $< a^L, a^P > \leq_p < b^L, b^P >$ if and only if $a^P \leq b^L$ and

$< a^L, a^P > \leq_o < b^L, b^P >$ if and only if $a^L \leq b^P$.

By applying these results we obtain two versions of the LP problem – pessimistic and optimistic one.

Pessimistic version:
maximize $z = 2x_1 + 3x_2$

subject to $\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ 9x_1 + x_2 \leq 20 \quad x_j \geq 0,\ j = 1,2 \end{array}$

Optimistic version:
maximize $z = 4x_1 + 5x_2$

subject to $\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_1 + x_2 \leq 22 \quad x_j \geq 0,\ j = 1,2 \end{array}$

The results of both versions obtained by simplex algorithm are dramatically different.

The results of pessimistic version: $x^*_{1\,p} = 1.8 \qquad x^*_{2\,p} = 4.5 \qquad z^*_p = 17.4$

The results of optimistic version: $x^*_{1\,o} = 4.5 \qquad x^*_{2o} = 8.5 \qquad z^*_o = 60.5$

An alternative approach is based on introducing fuzzy intervals and fuzzy numbers and taking expert understanding of the parameters nature into account.

Let us have the same LP problem with fuzzy numbers.

Maximize $\tilde{z} = \tilde{c}_A x_1 \tilde{+} \tilde{c}_B x_2$, (function of total fuzzy profit)

subject to fuzzy restrictions $\begin{array}{l} \tilde{a}_{1A} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{2A} x_2 \tilde{\leq} \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{1B} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{2B} x_2 \tilde{\leq} \tilde{b}_2 \end{array}$ (2)

where $x_j \geq 0$ *and*

coefficients $\tilde{c}_A, \tilde{c}_B, \tilde{a}_{jA}, \tilde{b}_{jB}, \tilde{b}_j$ are fuzzy sets, $j = 1,2$

Inequality relation can be defined both in a pessimistic and optimistic way again, as follows:

Let $\sigma, \rho \in \langle 0,1 \rangle$.

Fuzzy interval $\tilde{x}$ is pessimistically less-or-equal than fuzzy interval $\tilde{y}$ with membership degree ρ if

$$\mu_p(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 - \inf\{\alpha \in \langle 0,1 \rangle; \inf \tilde{x}_\alpha \leq \sup \tilde{y}_\alpha\} = \rho$$

Fuzzy interval $\tilde{x}$ is optimistically less-or-equal than interval $\tilde{y}$

with membership degree σ if

$\mu_o(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sup\{\alpha \in <0,1>; \sup \tilde{x}_\alpha \leq \inf \tilde{y}_\alpha \} = \sigma$.

As the fuzzy intervals are triangular fuzzy numbers, it is obvious that for $\tilde{a} = (a^L, a, a^P)$ is

$$\mu_a(x) = \frac{x - a^L}{a - a^L} \ for\ a^L \leq x \leq a, \qquad \text{see Fig.1}$$

$$\eta_a(x) = \frac{a^P - x}{a^P - a} \ for\ a \leq x \leq a^P$$

For triangular fuzzy numbers $\tilde{x} = (x^L, x, x^P)$, $\tilde{y} = (y^L, y, y^P)$, the formula of the optimistic and pessimistic inequality can be simplified as follows:

$\tilde{x} \leq_p \tilde{y}$ with membership degree ρ if

$$\rho = \max\{0,\ \min\{1, \frac{x - y}{x - y + y^P - x^L}\ \}\ \} \text{ and}$$

$\tilde{x} \leq_o \tilde{y}$ with membership degree σ if

$$\sigma = \max\{0,\ \min\left\{1, \frac{x^P - y^L}{x^P - y^L + y - x}\right\}\ \} .$$

The set of feasible solutions of LP problem is a fuzzy set of nonnegative vectors again. The aim is to find such a feasible solution which satisfies given constraints in a high degree. Thus we obtain a concept of
α - feasible solution of the problem (either optimistic or pessimistic).

The following definition will be useful:

Let $\alpha \in <0,1>$. Then α - feasible optimistic solution of fuzzy LP is a vector

$\tilde{x} = (x_1, x_2) \geq 0$ satisfying the following inequality:

$$\min\{\mu_o(\tilde{a}_{1A} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{2A} x_2; \tilde{b}_1), \mu_o(\tilde{a}_{1B} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{2B} x_2; \tilde{b}_2)\ \} \geq \alpha$$

and α - feasible pessimistic solution of fuzzy LP is a vector

$\tilde{x} = (x_1, x_2) \geq 0$ satisfying the inequality:

$$\min \mu_p(\tilde{a}_{1A} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{2A} x_2; \tilde{b}_1), \mu_p(\tilde{a}_{1B} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{2B} x_2; \tilde{b}_2)\ \} \geq \alpha$$

α - optimal optimistic solution of fuzzy LP is then such a vector from the feasible optimistic solutions which maximizes optimistic objective function

$\sup\, (\tilde{c}_A)_\alpha x_1 + \sup (\tilde{c}_B)_\alpha x_2$

and α - optimal pessimistic solution of fuzzy LP is such a vector from the feasible pessimistic solutions which maximizes pessimistic objective function

$\inf (\tilde{c}_A)_\alpha x_1 + \inf (\tilde{c}_B)_\alpha x_2$

For triangular fuzzy numbers it is possible to prove that instead of task (2) the following two tasks can be solved:

maximize $\left[\alpha c_A + (1-\alpha) c_{A1}^P\right] x_1 + \left[\alpha c_B + (1-\alpha) c_B^P\right] x_2$

subject to (3)

$\left[\alpha a_{1A} + (1-\alpha) a_{1A}^L\right] x_1 + \left[\alpha a_{2A} + (1-\alpha) a_{2A}^L\right] x_2 \le \alpha b_1 + (1-\alpha) b_1^P$

$\left[\alpha a_{1B} + (1-\alpha) a_{1B}^L\right] x_1 + \left[\alpha a_{2B} + (1-\alpha) a_{2B}^L\right] x_2 \le \alpha b_2 + (1-\alpha) b_2^P$

$x_1, x_2 \ge 0$

where optimal solution of task (3) is α - optimal optimistic solution of task (2)

and maximize $\left[\alpha c_A + (1-\alpha) c_A^L\right] x_1 + \left[\alpha c_B + (1-\alpha) c_B^L\right] x_2$

subject to (4)

$[\,\alpha a_{1A}^P + (1-\alpha) a_{1A}]\, x_1 + [\,\alpha a_{2A}^P + (1-\alpha) a_{2A}]\, x_2 \le \alpha b_1^L + (1-\alpha) b_1$

$[\,\alpha a_{1B}^P + (1-\alpha) a_{1B}]\, x_1 + [\,\alpha a_{2B}^P + (1-\alpha) a_{2B}]\, x_2 \le a b_2^L + (1-\alpha) b_2$

where optimal solution of task (4) is α - optimal pessimistic solution of task (2).

Let us consider our example again.

Maximize $\tilde{z} = (2,3,4) x_1 \tilde{+} (3,4,5) x_2$

subject to

$(1,2,3) x_1 + (1,1,1) x_2 \ \tilde{\le}_o\ (9,11,13)$

$(3,6,9) x_1 + (1,1,1) x_2 \ \tilde{\le}_o\ (20,21,22)$ $x_1, x_2 \ge 0$ and let $\alpha = 0.5$

We get according to (3)

Maximize z = $3.5\, x_1 + 4.5\, x_2$

subject to $1.5\, x_1 + x_2 \le 12$

$7.5 x_1 + x_2 \le 21.5$, $x_j \ge 0$, j = 1,2 and then 0.5 - optimal optimistic solution is

$x_1^* = 1.6$, $x_2^* = 9.6$ and $z^* = 48.8$

Similarly by (4)

Maximize $z = 2.5x_1 + 3.5x_2$

subject to $\begin{array}{l} 2.5x_1 + x_2 \le 10 \\ 7.5x_1 + x_2 \le 20.5 \end{array}$ $x_j \ge 0$, j = 1,2

and we get 0.5 - optimal pessimistic solution

$x_1^* = 2.1$ $x_2^* = 4.8$ and $z^* = 22.1$.

At the end it is necessary to mention the fact that for the dual problem to fuzzy LP problem we get: α - optimal optimistic solution of the primal problem is equal to (1-α) - optimal pessimistic solution of the dual problem and similarly α - optimal pessimistic solution of the primal problem is equal to (1-α) - optimal optimistic solution of the dual problem, see [5].

Conclusion

This article introduces fuzzy sets and basic operations with them and then it shows their use in LP problems. It gives fundamentals of interval LP together with definitions of optimistic and pessimistic solutions. Further it shows possible generalization of fuzzy intervals and fuzzy numbers. Everything was illustrated on a simple LP problem with two variables and two restrictive conditions - constraints. It is necessary to mention that this approach to fuzzy linear programming is not the only possible. Some others can be found e.g. in [5].

The major advantage of this approach is the fact that information expressed by a fuzzy number is more appropriate than information expressed with the help of an interval. For each degree of satisfaction α, the level of feasible solutions is limited. The whole process of solving the problem can be performed for various degrees of satisfaction (i.e. values α) and thus we can get a better survey over possible solutions and their stability. Based on such a survey it is also possible to find out how to formulate the original problem in the most suitable way.

Literature

[1] Cox, E.: Fuzzy fundamentals. IEEE Spectrum, 1992, pp. 58-61.

[2] Lee, C.C.: Fuzzy Logic in Control Systems. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, SMC, Vol. 20, No. 2, 1990, pp. 404-35.

[3] Navara, M., Olšák, P.: Základy fuzzy množin. České vysoké učení technické, Fakulta elektrotechnická, 136 s., Praha 2002. ISBN 80-01-02585-3.

[4] Ramík, J.: Interval and Fuzzy Linear Programming demonstrated by Example. Proceedings of 25th International Conference Mathematical Methods in Economics, 2007, pp. 290-299, VSV-TU Ostrava, 2007. ISBN 978-80-248-1457-5.

[5] Ramík, J., Vlach, M.: Generalized Concavity in Optimization and Decision Making. Kluwer Publ. Comp. Boston-Dordrecht-London, 2002. 305p. ISBN 0-7923-7494-9.

[6] Rommelfanger,H.: Fuzzy linear programming and applications. European Journal of Operational Research, vol. 92 (1996), pp. 512- 527

[7] Zadeh, L.A.,Yager, R.R. et al. eds.: Selected Papers by Fuzzy Sets and Applications. John Wiley Publ., New York, 1987.

[8] http://www.seattlerobotics.org/encoder/mat98/fuz/flindex.html

Pár slov o fuzzy množinách a fuzzy lineárním programování

Abstrakt

Cílem tohoto článku nejsou nové výsledky, ale seznámení s poměrně novým matematickým pojmem „fuzzy množina“ a se základními operacemi s takovými množinami. Jsou zde uvedeny základní vlastnosti fuzzy množin a je naznačeno jejich užití v lineárním programování na jednoduché úloze LP.

Fuzzy logika, která používá interval < 0,1 > pro stupeň příslušnosti prvku množiny vzhledem k množině, kde jistota, že prvek patří nebo nepatří do množiny je pouze speciálním případem stupně příslušnosti prvku k množině, poskytuje další možnosti precizovat metody pro řešení problému na základě více méně nepřesných (fuzzy) předpokladů. Matematické zpracování této subjektivní nepřesnosti otevírá fuzzy množinám širokou sféru aplikací. Data získávaná z fuzzy systémů jsou obecná s nepřesnými hranicemi. Příklady takových systémů jsou sociální nebo ekonomické systémy a lidské vnímání.

Klíčová slova

Fuzzy množina, reprezentace fuzzy množiny, operace s fuzzy množinami, fuzzy interval, fuzzy číslo, fuzzy lineární programování

Kontaktní údaje

RNDr. Marie Hojdarová, CSc.
Katedra matematiky Vysoké školy polytechnické Jihlava
Tolstého 16, 586 01 Jihlava
e-mail: hojdarova@vspj.cz
tel. 567 141 155

Řešení hlavolamů Einsteinova typu pomocí optimalizace

Vladislav Chýna

VŠE Praha, katedra ekonometrie

Abstrakt

V příspěvku jsou prezentovány metody pro řešení hlavolamů Einsteinova typu (v pěti různých domech žije pět lidí různé národnosti,....) V méně složitých případech můžeme použít formulaci pomocí absolutních hodnot, složitější příklady vedou na přiřazovací problém. Uvedeny jsou rovněž zdrojové kódy v SW Lingo.

Klíčová slova

Einsteinův hlavolam, přiřazovací problém, Lingo

Úvod

Při vyslovení slov operační výzkum se většině studentů (ať již stávajících či minulých) zřejmě vybaví výrobní problém či úloha obchodního cestujícího (viz např. [6], [10]), popřípadě hledání optimálních portfolií a jejich testování vzhledem ke zvoleným kritériím (viz např. [7], [8]), pokud pracují v oblasti finančnictví.

Úkolem našeho miniseriálu (první díl viz [5]) je však představení optimalizace v úplně jiné oblasti – jako nástroje pro řešení logických hádanek a hlavolamů. V dnešním příspěvku se podíváme na postupy, které je možné použít při řešení hádanek, které se pravidelně objevují v luštitelské části novin a časopisů a z nichž nejznámější je připisována Einsteinovi (viz např. [1], [3]) - v řadě vedle sebe je pět domů s rozdílnými barvami, v nichž žije 5 lidí rozdílné národnosti a každý z obyvatelů pije rozdílný nápoj, kouří jiné cigarety a chová odlišné zvíře. Einstein údajně tvrdil (viz např. [1], [3]), že tuto hádanku není schopno vyřešit 98 % lidí. Těžko posoudit, co je na tom pravdy. Úlohy podobných typů se totiž objevují jak v národních srovnávacích zkouškách, které některé z vysokých škol používají místo přijímacího řízení (viz [9]), tak přímo v přijímacích zkouškách na vysoké školy (viz [11]). A protože se uvádí, že na různých vysokých školách studuje 60 % populačního ročníku, situace s „logickými schopnostmi“ lidí zřejmě nebude tak drastická[1]. Navíc, jak je naším cílem ukázat, pomocí základních optimalizačních „triků“ zvládne vyřešit tyto úlohy úplně každý.

---

[1] Autor článku musí ale bohužel přiznat, že sám není Einsteinův hlavolam schopen „z hlavy“ vyřešit.

Protože je řešení tohoto hlavolamu obecně známé (např. v [3] lze dokonce najít podrobný postup řešení), podíváme se na drobně odlišné hádanky, z nichž jedna bude jednodušší a druhá naopak mírně složitější, než ta Einsteinova.

Lehký problém

Jako první si ukážeme krátkou hádanku, kterou jistě není problém vyřešit z hlavy. Ani pomocí optimalizace to však nedá příliš mnoho práce.

Zadání:

Sotva se otevřely brány veletrhu, vstoupilo pět manažerů. Napište v jakém pořadí podle těchto informací:

1. Pavel měl pořadí o dvě vyšší než Ložek.
2. Olejník přišel později než Myška.
3. Ondřej si zakoupil vstupenku těsně před Richardem.
4. Martin navštívil veletrh již popáté, jako první přišel Franěk, hned za ním Richard.
5. Pátý návštěvník byl Věroslav, těsně před ním přišel Zíka.

Matematický model:

Úlohu můžeme vyřešit například následujícím postupem:

Nejprve je potřeba ze zadání získat všechna křestní jména a příjmení. Označme si $X_1, \ldots, X_5$ proměnné, které reprezentují křestní jméno manažera. Podobně $Y_1, \ldots, Y_5$ budou reprezentovat příjmení manažera a to například takto:

Tab. 1: Proměnné v hádance „Na veletrhu“

X_1 - Ondřej	Y_1 - Franěk
X_2 - Richard	Y_2 - Ložek
X_3 - Martin	Y_3 - Myška
X_4 - Pavel	Y_4 - Zíka
X_5 - Věroslav	Y_5 - Olejník

Jak X_i, tak Y_i, $i = 1, \ldots, 5$ pak bude nabývat různých hodnot 1 až 5, které budou znamenat pořadí příchodu managera daného křestního jména / příjmení na veletrh.

$$1 \leq X_i \leq 5, \textit{celé} \quad \forall i = 1, \ldots, 5$$

$$1 \leq Y_i \leq 5, \textit{celé} \quad \forall i = 1, \ldots, 5$$

Podmínku, že se jedná o různá čísla (jde o pořadí) můžeme zapsat v takto jednoduchém případě například pomocí absolutní hodnoty – rozdíl jakýchkoliv dvou čísel totiž musí být aspoň 1:

$$\left|X_i - X_j\right| \geq 1 \quad \forall i, j = 1,\ldots,5$$

$$\left|Y_i - Y_j\right| \geq 1 \quad \forall i, j = 1,\ldots,5$$

Nyní již zbývá pouze přepsat podmínky ze zadání úlohy:

1. Pavel měl pořadí o dvě vyšší než Ložek. $X_4 = Y_2 + 2$
2. Olejník přišel později než Myška. $Y_5 \geq Y_3 + 1$
3. Ondřej si zakoupil vstupenku těsně před Richardem. $X_1 = X_2 - 1$
4. Martin navštívil veletrh již popáté, jako první přišel Franěk, hned za ním Richard. $Y_1 = 1, X_2 = 2$
5. Pátý návštěvník byl Věroslav, těsně před ním přišel Zíka. $X_5 = 5, Y_4 = 4$.

Řešení:

K vyřešení úlohy použijeme (podobně jako v [5]) optimalizační SW Lingo, který nám umožní přímočarý přepis matematického modelu:

```
Model:

Sets:

KrestniJmeno/Ondrej,Richard,Martin,Pavel,Veroslav/:X;

                    !  1          2         3         4         5;

Prijmeni/Franek,Lozek,Myska,Zika,Olejnik/:Y;

            !  1          2       3      4         5;

Endsets

X(4)=Y(2)+2;

Y(5)>=Y(3)+1;

X(1)=X(2)-1;

Y(1)=1;

X(2)=2;

X(5)=5;

Y(4)=4;


!Jde o pořadí 1-5;
```

```
@for(KrestniJmeno:
        X>=1;
        X<=5;
        @gin(X);
);
@for(Prijmeni:
        Y>=1;
        Y<=5;
        @gin(Y);
);
!pořadí je různé;
@for(KrestniJmeno(i):@for(KrestniJmeno(j)|i#LT#j:@abs(X(i)-
X(j))>=1));
@for(Prijmeni(i):@for(Prijmeni(j)|i#LT#j:@abs(Y(i)-Y(j))>=1));

end
```

Během několika milisekund získáme následující řešení:

Tab. 2: Řešení hádanky „Na veletrhu"

Variable	Value	Variable	Value
X(ONDREJ)	1	Y(FRANEK)	1
X(RICHARD)	2	Y(LOZEK)	2
X(MARTIN)	3	Y(MYSKA)	3
X(PAVEL)	4	Y(ZIKA)	4
X(VEROSLAV)	5	Y(OLEJNIK)	5

Manažeři tedy přišli na veletrh v následujícím pořadí:

1. Ondřej Franěk
2. Richard Ložek
3. Martin Myška
4. Pavel Zíka
5. Věroslav Olejník

Složitější problém

U složitějších problémů (tedy aspoň pokud chceme využít jako optimalizační řešitel SW Lingo) nemůžeme bohužel použít formulaci pomocí absolutních hodnot. Lingo totiž při větším počtu proměnných „odmítá" řešit úlohy s absolutní hodnotou a to i přes to, že v nápovědě uvádí počet nelineárních proměnných jako neomezený (blíže o tomto problému viz [4]). Jak si ukážeme v následujícím příkladu, musíme tedy použít poněkud složitější formulaci přes přiřazovací problém (základní formulaci přiřazovacího problému lze nalézt např. v [6] nebo v [10]).

Zadání:

Tento problém pochází z [2] a spadá do oblasti v poslední době stále oblíbenějšího geocachingu. Stránky [2] slouží k zveřejňování adres s tzv. cache (nebo také počeštěně keška), což je ukrytá schránka s „pokladem". Aby její nalezení nebylo tak jednoduché, autoři (tzv. cacheři nebo také kešeři či dokonce kačeři) skrývají souřadnice pomocí logických hádanek. Nyní již k vlastnímu zadání:

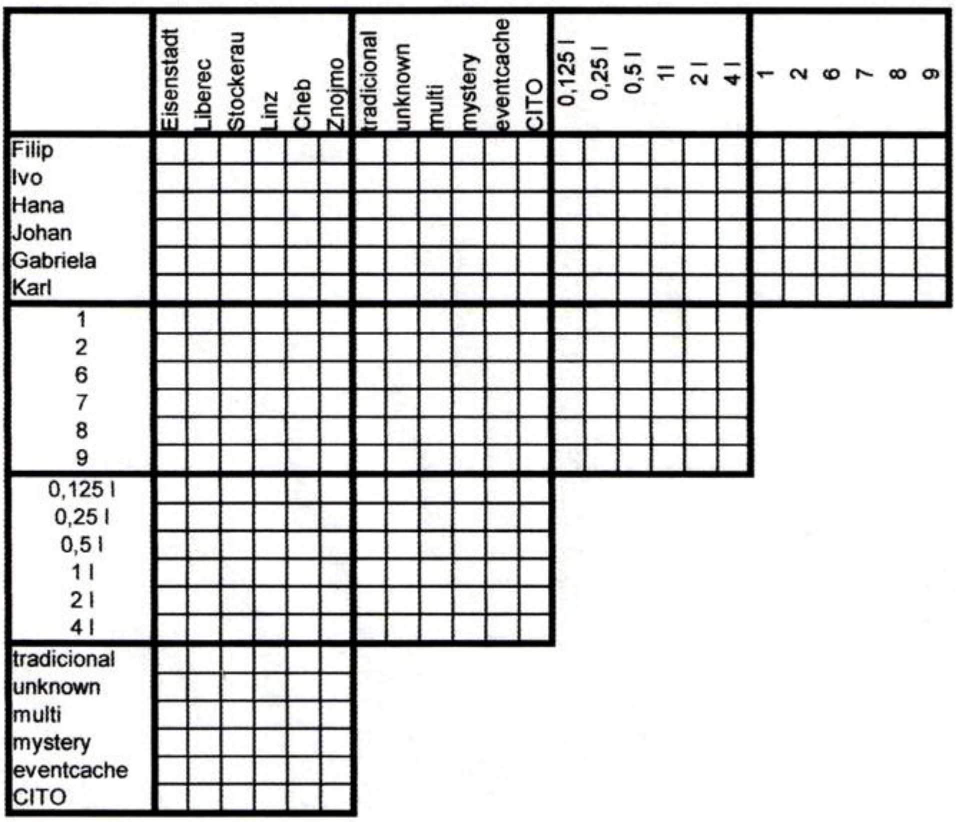
Pro zjištění souřadnic je třeba zodpovědět níže uvedené otázky, týkající se 6 kešerů. Každý žije a ukrývá keše v jednom městě. Každý preferuje jistý typ keše a používá typický druh nádoby, lišící se ve velikosti. Každý skryl různé množství keší. Parametry F-K jsou první písmena jmen kešerů a hodnotou je počet nalezených keší. Užitečná bude mapa obou států. Ke zodpovězení otázek pomůže formulář. Jakákoliv podobnost s žijícími osobami a skrytými boxy je pouze náhodná a zcela neúmyslná.

Otázky :

1. Filip žije severněji než Hana, která žije východněji než Gabriela. Karl nežije ani v nejvýchodnějším, ani nejzápadnějším městě. Ivo žije jižněji než Johan.
2. Johan a Ivo nemají rádi tradiční ani multi, Hana nemá ráda mystery.
3. Unknown keš je dvakrát tak velká jak keš v Chebu. CITO-kontejnery jsou větší než event-kontejnery.
4. Osoba, která ukryla keš ve Stockerau, není žena, ve Znojme to není muž.
5. Karl skryl méně keší než Ivo, Gabriela skryla více keší než Ivo.
6. Hana skryla o 5 keší více než je možno nalézt v Chebu.
7. Keš v Linzu je větší než mystery-keš, která nepoužívá nejmenší dostupnou velikost kontejneru. CITO-kontejner je větší než keš v Linzu.
8. Ženami nejsou používány ani nejmenší ani největší nádoby. Hana používá nádoby, které jsou 4x tak velké jako ty co používá Karl.
9. Organizátor Event-keší, který nenávidí nádobu velikosti pod 1 litr, nežije ani v nejsevernějším ani v nejzápadnějším městě. Množství Event-keší není ani nejmenší ani největší.

10. Bezprostredně jižně od města kde je skryto 7 keší, je více jak 1 2 litrová nádoba. Město se 7 kešemi leží více k severu než město, kde jsou ukryty 4 litrové kbelíky.
11. Množství tradičních je lichý, zatím co množství mystery je sudý. Mystery jsou početnější než tradiční.
12. V jednom ze tří nejsevernějších měst, jsou ukryty přesně 2 keše. Sudý počet keší je ukryt v Stockerau.
13. Keše v Chebu a Znojmě mají maximální velikost 0,5 litru, nádoby ve Znojmě jsou větší než ty v Chebu.
14. Litrové nádoby jsou používány ženou, která skryla počet keší, který je dělitelný třemi.
15. Multicache jsou četnější než CITO-keše. CITO-keše nejsou nejméně oblíbený typ keše, ale jsou méně oblíbené než Event-keše.

Autor navíc zveřejnil následující obrázek jako pomocný formulář pro řešení:



Obr. 1: Pomocný formulář pro řešení hádanky „Šest kešerů“ (viz [2])

Matematický model:

Nejprve si očíslujme jednotlivé dílčí podúlohy (čtverce) následujícím způsobem:

	Mesto: 1 Eisenstadt, 2 Liberec, 3 Stockerau, 4 Linz, 5 Cheb, 6 Znojmo	Typ: 1 tradicional, 2 unknown, 3 multi, 4 mystery, 5 eventcache, 6 CITO	Velikost: 1 0,125, 2 0,25, 3 0,5, 4 1, 5 2, 6 4	Pocet: 1 1, 2 2, 3 6, 4 7, 5 8, 6 9
Jmeno: 1 Filip, 2 Ivo, 3 Hana, 4 Johan, 5 Gabriela, 6 Karl	1	2	3	4
Pocet: 1 1, 2 2, 3 6, 4 7, 5 8, 6 9	5	6	7	
Velikost: 1 0,125, 2 0,25, 3 0,5, 4 1, 5 2, 6 4	8	9		
Typ: 1 tradicional, 2 unknown, 3 multi, 4 mystery, 5 eventcache, 6 CITO	10			

Obr. 2: Očíslování jednotlivých čtverců

Je zřejmé, že například pro první čtverec formuláře musí být splněno, že každý kešer sídlí právě v jednom městě. Jde tedy o klasický přiřazovací problém. Zaveďme si binární proměnné, které (stejně jako v klasickém přiřazovacím problému) budou rovny 1, pokud je daná dvojce vybrána, jinak budou nulové. Protože toto musíme zajistit pro každý z 10 čtverců, zvolme trojmístné indexování (první index probíhá všechny čtverce, druhý index pak řádky v daném čtverci a třetí index sloupce v daném čtverci):

$$X_{k,i,j}\ \textit{binární} \quad \forall k=1,\ldots,10 \quad \forall i=1,\ldots,6 \quad \forall j=1,\ldots,6$$

Pomocí následujících podmínek zajistíme, že v každém ze čtverců bude právě jedna jednotka v řádku a právě jedna jednotka ve sloupci (máme tedy 10 různých přiřazovacích problémů):

$$\sum_{i=1}^{6} X_{k,i,j}=1 \quad \forall k=1,\ldots,10 \quad \forall j=1,\ldots,6$$

$$\sum_{j=1}^{6} X_{k,i,j}=1 \quad \forall k=1,\ldots,10 \quad \forall i=1,\ldots,6$$

Nyní již přejděme k vlastním podmínkám, které plynou z jednotlivých otázek.

Jak je uvedeno v zadání, „užitečná bude mapa obou států“ – v ní totiž nejprve musíme zjistit polohu jednotlivých měst – čím bude město severněji, tím více mu dáme bodů, obdobně čím bude město západněji.

Tab. 3: Pozice měst v hádance „Šest kešerů“

Město	**Pořadí sever - jih**	**Pořadí západ - východ**
Eisenstadt	1	1
Liberec	6	4
Stockerau	3	2
Linz	2	5
Cheb	5	6
Znojmo	4	3
Proměnná pro uložení dat	*PoradiSeverJih*	*PoradiZapadVychod*

Z otázky číslo 1 získáváme hned několik dílčích podúloh:

Filip žije severněji než Hana:

$$\sum_{j=1}^{6} PoradiSeverJih_j \, X_{1,1,j} \geq \sum_{j=1}^{6} PoradiSeverJih_j \, X_{1,3,j} + 1$$

Hana žije východněji než Gabriela.

$$\sum_{j=1}^{6} PoradiZapadVychod_j \, X_{1,3,j} + 1 \leq \sum_{j=1}^{6} PoradiZapadVychod_j \, X_{1,5,j}$$

Karl nežije ani v nejvýchodnějším, ani nejzápadnějším městě.

$$\sum_{j=1}^{6} PoradiZapadVychod_j \, X_{1,6,j} \geq 1 + 1$$

$$\sum_{j=1}^{6} PoradiZapadVychod_j \, X_{1,6,j} \leq 6 - 1$$

Ivo žije jižněji než Johan.

$$\sum_{j=1}^{6} PoradiSeverJih_j \, X_{1,2,j} + 1 \leq \sum_{j=1}^{6} PoradiSeverJih_j \, X_{1,4,j}$$

Další otázky budeme formulovat obdobně (z nedostatku místa uveďme místo matematického modelu raději přímo okomentovaný zdrojový kód ze SW Lingo).

Mírným překvapením však může být (aspoň pro autora článku bylo), že ani po zapsání všech 15 podmínek neobdržíme správné řešení. A to rozhodně ne z důvodu, že by podmínky byly zapsány špatně či dokonce Lingo spočítalo špatné řešení[2]. Musíme totiž navíc zajistit podmínky tranzitivity. Pokud je například Filip z Eisenstadtu a používá keš traditional, je logické, že traditional keš se musí nacházet také v Eisenstadtu. To je ale potřeba zajistit podmínkami pro každou z dvojic[3] (musíme zabránit tomu, aby proměnná nabyla hodnotu 1 na jiném, než správném místě). Můžeme toho dosáhnout například následujícím způsobem:

$$X_{1,i,j} + X_{2,i,k} - 1 \leq X_{10,k,j} \qquad \forall i = 1,\ldots,6 \quad \forall j = 1,\ldots,6 \quad \forall k = 1,\ldots,6$$

A obdobně pro další dvojice – viz komentovaný kód z Linga uvedený dále.

Řešení:

K vyřešení úlohy použijeme opět optimalizační SW Lingo. Protože se jedná o poměrně složitý problém, využijeme rovněž možnost exportu řešení do MS Excel – přímo do jednotlivých buněk formuláře:

```
MODEL:
SETS:

   Cache /1..6/: PoradiSeverJih, PoradiZapadVychod, PocetCache,
VelikostCache, PohlaviCachera;
   Ctverec/1..10/;

   Matice(Ctverec, Cache , Cache): X;
!pomocné proměnné pro výstup do excelu;
   Vystup(Cache, Cache): Ctverec1, Ctverec2, Ctverec3, Ctverec4,
Ctverec5, Ctverec6, Ctverec7, Ctverec8, Ctverec9, Ctverec10;
ENDSETS

! Data;
DATA:
      PoradiSeverJih = 1, 6, 3, 2, 5, 4; !seřazení měst
od severu k jihu;
      PoradiZapadVychod = 1, 4, 2, 5, 6, 3;!seřazení měst
od západu k východu;
      PocetCache = 1, 2, 6, 7, 8, 9;
      VelikostCache = 0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 4;
      PohlaviCachera = 1,1,2,1,2,1; !1 = muž, 2 = žena;
      @OLE('HlavolamCache.xls') = Ctverec1, Ctverec2, Ctverec3,
Ctverec4, Ctverec5, Ctverec6, Ctverec7, Ctverec8, Ctverec9,
Ctverec10; !výstup do excelu;
ENDDATA

!pomocné proměnné pro výstup do excelu;
@FOR( Cache(I):
```

[2] I když osobně musím přiznat, že jsem touto kontrolou strávil mnohem více času než vlastním řešením.

[3] Díky tranzitivnosti jednotlivých podmínek nemusíme možná uvádět úplně všechny, ale rozhodně je to jednodušší, než zkoumat, které jsou duplicitní.

```
      @FOR( Cache(J):
            Ctverec1(i,j)= X(1,i,j);
            Ctverec2(i,j)= X(2,i,j);
            Ctverec3(i,j)= X(3,i,j);
            Ctverec4(i,j)= X(4,i,j);
            Ctverec5(i,j)= X(5,i,j);
            Ctverec6(i,j)= X(6,i,j);
            Ctverec7(i,j)= X(7,i,j);
            Ctverec8(i,j)= X(8,i,j);
            Ctverec9(i,j)= X(9,i,j);
            Ctverec10(i,j)= X(10,i,j);
      );
);
!-----přiřazovací problém pro každý čtverec zvlášť------;
!pro každý řádek I suma sloupce = 1;
 @FOR( Ctverec(K):
      @FOR( Cache(I):
            @SUM( Cache(J): X( K, I, J)) = 1;
      );
);
!pro každý sloupc J suma řádku = 1;
@FOR( Ctverec( K):
      @FOR( Cache(J):
            @SUM( Cache(I): X( K, I, J)) = 1;
      );
);

!binární proměnné;
@FOR(Matice:
      @BIN(X);
);


!podmínky tranzitivnosti na jednotlivé čtverce;
!jméno - město + jméno - typ --> typ - město;
!čtverec1      + čtverec2    --> čtverec10;
@FOR(Cache(I):
      @FOR(Cache(J):
            @FOR(Cache(K):
                  X(1,I,J)+X(2,I,K)-1<=X(10,k,j);
            );
      );
);

!podmínky na jednotlivé čtverce;
!jméno - město + jméno - velikost --> velikost - město;
!čtverec1      + čtverec3    --> čtverec8;
@FOR(Cache(I):
      @FOR(Cache(J):
            @FOR(Cache(K):
                  X(1,I,J)+X(3,I,K)-1<=X(8,k,j);
            );
```

```
      );
);

!jméno - město + jméno - počet --> počet - město;
!čtverec1      + čtverec4     --> čtverec5;
@FOR(Cache(I):
      @FOR(Cache(J):
            @FOR(Cache(K):
                  X(1,I,J)+X(4,I,K)-1<=X(5,k,j);
            );
      );
);

!počet - město + počet - typ --> město - typ;
!čtverec5      + čtverec6     --> čtverec10;
@FOR(Cache(I):
      @FOR(Cache(J):
            @FOR(Cache(K):
                  X(5,I,J)+X(6,I,K)-1<=X(10,k,j);
            );
      );
);

!počet - město + počet - velikost --> město - velikost;
!čtverec5      + čtverec7     --> čtverec8;
@FOR(Cache(I):
      @FOR(Cache(J):
            @FOR(Cache(K):
                  X(5,I,J)+X(7,I,K)-1<=X(8,k,j);
            );
      );
);

!velikost - město + velikost - typ --> město - typ;
!čtverec8      + čtverec9     --> čtverec10;
@FOR(Cache(I):
      @FOR(Cache(J):
            @FOR(Cache(K):
                  X(8,I,J)+X(9,I,K)-1<=X(10,k,j);
            );
      );
);

!-----------------------------------;
!-------Podmínky z hlavolamu------;

!1. Filip žije severněji než Hana, která žije východněji než
Gabriela.
Karl nežije ani v nejvýchodnějším, ani nejzápadnějším městě. Ivo
žije jižněji než Johan.;
@SUM(Cache(J): PoradiSeverJih(j)*X(1,1,j))>=@SUM(Cache(J):
PoradiSeverJih(j)*X(1,3,j))+1; !netřeba kontrolovat rovnost (tj.
```

```
nemusíme dát +1) - města musí být různá - zajištěno jinou
podmínkou;
@SUM(Cache(J): PoradiZapadVychod(j)*X(1,3,j))+1<=@SUM(Cache(J):
PoradiZapadVychod(j)*X(1,5,j));
@SUM(Cache(J):
PoradiZapadVychod(j)*X(1,6,j))>=1+1;!nejvýchodnější město = 1;
@SUM(Cache(J): PoradiZapadVychod(j)*X(1,6,j))<=6-
1;!nejzápadnější město = 6;
@SUM(Cache(J): PoradiSeverJih(j)*X(1,2,j))+1<=@SUM(Cache(J):
PoradiSeverJih(j)*X(1,4,j)); !Johan žije severněji;

!2. Johan a Ivo nemají rádi tradiční ani multi, Hana nemá ráda
mystery.;
X(2,4,1)=0;
X(2,4,3)=0;
X(2,2,1)=0;
X(2,2,3)=0;
X(2,3,4)=0;

!3. Unknown keš je dvakrát tak velká jak cache v Chebu.
CITO-kontejnery jsou větší než event-kontejnery.;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(9,I,2))=2*@SUM(Cache(I):Velikos
tCache(I)*X(8,I,5));
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(9,I,6))>=@SUM(Cache(I):Velikost
Cache(I)*X(9,I,5))+0.1;

!4. Osoba, která ukryla keš ve Stockerau není žena, ve Znojmě to
není muž.;
@SUM(Cache(I):PohlaviCachera(I)*X(1,I,3))=1;
@SUM(Cache(I):PohlaviCachera(I)*X(1,I,6))=2;

!5. Karl skryl méně keší než Ivo, Gabriela skryla více keší než
Ivo.;
@SUM(Cache(J):PocetCache(J)*X(4,6,J))+1<=
@SUM(Cache(J):PocetCache(J)*X(4,2,J));
@SUM(Cache(J):PocetCache(J)*X(4,5,J))>=
@SUM(Cache(J):PocetCache(J)*X(4,2,J))+1;

!6. Hana skryla o 5 keší více než je možno nalézt v Chebu.;
@SUM(Cache(J):PocetCache(J)*X(4,3,J))=
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(5,I,5))+5;

!7. Keš v Linzu je větší než mystery-keš,
která nepoužívá nejmenší dostupnou velikost kontejneru.
CITO-kontejner je větší než keš v Linzu.;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(8,I,4))>=
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(9,I,4))+0.1;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(9,I,4))>=0.25;!dáme, že musí
být aspoň druhá nejmenší, ekvivalentně možno zapsat natvrdo
podmínku X(?,?,?)=0;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(9,I,6))>=
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(8,I,4))+0.1;
```

```
!8. Ženami nejsou používány ani nejmenší ani největší nádoby.
Hana používá nádoby, které jsou 4x tak velké jako ty co používá
Karl.;
@FOR(Cache(I)|i#EQ#3 #OR# i#EQ#5:
    @SUM(Cache(J):VelikostCache(J)*X(3,I,J))>=0.25;
    @SUM(Cache(J):VelikostCache(J)*X(3,I,J))<=2;
);
@SUM(Cache(J):VelikostCache(J)*X(3,3,J))=4*@SUM(Cache(J):Velikos
tCache(J)*X(3,6,J));

!9. Organizátor Event-keší, který nenávidí nádobu velikosti pod
1 litr, nežije ani v nejsevernějším ani v nejzápadnějším městě.
Množství Event-keší není ani nejmenší ani největší.;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(9,I,5))>=1;
@SUM(Cache(J):PoradiSeverJih(J)*X(10,5,J))<=5;
@SUM(Cache(J):PoradiZapadVychod(J)*X(10,5,J))<=5;
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(6,I,5))>=2;
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(6,I,5))<=8;

!10. Bezprostředně jižně od města, kde je skryto 7 keší, je více
jak 1 2-litrová nádoba.
Město se 7 kešemi leží více k severu než město, kde jsou ukryty
4-litrové kbelíky.;
@SUM(Cache(J):PoradiSeverJih(J)*X(5,4,J))-
1=@SUM(Cache(J):PoradiSeverJih(J)*X(8,5,J)); !jižně od města je
dvoulitrová nádoba;
X(7,1,5)=0;!zakážeme pro počet dvoulitrových 1;

@SUM(Cache(J):PoradiSeverJih(J)*X(5,4,J))>=@SUM(Cache(J):PoradiS
everJih(J)*X(8,6,J))+1;

!11. Množství tradičních je lichý, zatím co množství mystery je
sudý.
Mystery jsou početnější než tradiční.;
X(6,2,1)=0;!nejjednodušší je zakázat sudá čísla;
X(6,3,1)=0;
X(6,5,1)=0;
X(6,1,4)=0; !nejjednodušší je zakázat lichá čísla;
X(6,4,4)=0;
X(6,6,4)=0;
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(6,I,4))>=@SUM(Cache(I):PocetCache(
I)*X(6,I,1))+1;

!12. V jednom ze tří nejsevernějších měst jsou ukryty přesně
2 keše.
Sudý počet keší je ukryt v Stockerau.;
@SUM(Cache(J):PoradiSeverJih(J)*X(5,2,J))>=4;
X(5,1,3)=0;! nejjednodušší je zakázat lichý počet;
X(5,4,3)=0;
X(5,6,3)=0;
```

```
!13. Keše v Chebu a Znojmě mají maximální velikost 0,5-litru,
nádoby ve Znojmě jsou větší než ty v Chebu.;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(8,I,5))<=0.5;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(8,I,6))<=0.5;
@SUM(Cache(I):VelikostCache(I)*X(8,I,6))>=@SUM(Cache(I):Velikost
Cache(I)*X(8,I,5))+0.1;!minimální změna je 0.125 - dáme větší
o 0.1;

!14. Litrové nádoby jsou používány ženou,
která skryla počet keší, který je dělitelný třemi.;
@SUM(Cache(I):PohlaviCachera(I)*X(3,I,4))=2; !ekvivalentně možno
natvrdo zakázat muže X(?,?,?)=0;
X(7,1,4)=0;!dáme podmínku na čtverec velikost-počet -> pro 1
litrové nádoby zakážeme počet nedělitelný třemi;
X(7,2,4)=0;
X(7,4,4)=0;
X(7,5,4)=0;

!15. Multicache jsou četnější než CITO-keše.
CITO-keše nejsou nejméně oblíbený typ keše, ale jsou méně
oblíbené než Event-keše.;
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(6,I,3))>=
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(6,I,6))+1;
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(6,I,6))>=2;
@SUM(Cache(I):PocetCache(I)*X(6,I,6))+1<=@SUM(Cache(I):PocetCach
e(I)*X(6,I,5));
END
```

Opět po velmi krátké době (i přes značné množství bivalentních proměnných a podmínek) získáme řešení:

			1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
			Mesto						**Typ**						**Velikost**						**Pocet**					
			Eisenstadt	**Liberec**	**Stockerau**	**Linz**	**Cheb**	**Znojmo**	**tradicional**	**unknown**	**multi**	**mystery**	**eventcache**	**CITO**	**0,125**	**0,25**	**0,5**	**1**	**2**	**4**	**1**	**2**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	**Jmeno**	**Filip**	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2		**Ivo**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
3		**Hana**	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4		**Johan**	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
5		**Gabriela**	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
6		**Karl**	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	**Pocet**	**1**	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0						
2		**2**	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0						
3		**6**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1						
4		**7**	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0						
5		**8**	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0						
6		**9**	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0						
1	**Velikost**	**0,125**	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0												
2		**0,25**	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0												
3		**0,5**	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0												
4		**1**	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0												
5		**2**	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0												
6		**4**	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1												
1	**Typ**	**tradicional**	0	1	0	0	0	0																		
2		**unknown**	0	0	0	0	0	1																		
3		**multi**	0	0	0	1	0	0																		
4		**mystery**	0	0	0	0	1	0																		
5		**eventcache**	0	0	1	0	0	0																		
6		**CITO**	1	0	0	0	0	0																		

Obr. 2: Hádanka „Šest kešerů“ – export řešení do MS Excel

Ještě zkontrolujeme, zda úloha nemá více řešení – nejjednodušeji tak, že získané řešení zakážeme – každé jiné řešení totiž musí mít aspoň jednu z uvedených bivalentních proměnných jinou (tj. nulovou).

```
!Zakázání řešení;
X( 1, 1, 5)+X( 1, 2, 1)+X( 1, 3, 6)+X( 1, 4, 3)+X( 1, 5, 4)+
X( 1, 6, 2)+
X( 2, 1, 4)+X( 2, 2, 6)+X( 2, 3, 2)+X( 2, 4, 5)+X( 2, 5, 3)+
X( 2, 6, 1)+
X( 3, 1, 2)+X( 3, 2, 6)+X( 3, 3, 3)+X( 3, 4, 5)+X( 3, 5, 4)+
X( 3, 6, 1)+
X( 4, 1, 2)+X( 4, 2, 3)+X( 4, 3, 4)+X( 4, 4, 5)+X( 4, 5, 6)+
X( 4, 6, 1)+
X( 5, 1, 2)+X( 5, 2, 5)+X( 5, 3, 1)+X( 5, 4, 6)+X( 5, 5, 3)+
X( 5, 6, 4)+
X( 6, 1, 1)+X( 6, 2, 4)+X( 6, 3, 6)+X( 6, 4, 2)+X( 6, 5, 5)+
X( 6, 6, 3)+
X( 7, 1, 1)+X( 7, 2, 2)+X( 7, 3, 6)+X( 7, 4, 3)+X( 7, 5, 5)+
X( 7, 6, 4)+
X( 8, 1, 2)+X( 8, 2, 5)+X( 8, 3, 6)+X( 8, 4, 4)+X( 8, 5, 3)+
X( 8, 6, 1)+
X( 9, 1, 1)+X( 9, 2, 4)+X( 9, 3, 2)+X( 9, 4, 3)+X( 9, 5, 5)+
X( 9, 6, 6)+
X( 10, 1, 2)+X( 10, 2, 6)+X( 10, 3, 4)+X( 10, 4, 5)+X( 10, 5,
3)+X( 10, 6, 1)<=59;
```

Po přidání této podmínky již neexistuje žádné přípustné řešení, výše uvedené řešení je tedy jedinečné. Pro přehlednost ho ještě uveďme formou tabulky:

Tab. 4: Řešení hádanky „Šest kešerů"

Jméno	Město	Typ	Velikost	Počet
Filip	Cheb	mystery	0,25	2
Ivo	Eisenstadt	CITO	4	6
Hana	Znojmo	unknown	0,5	7
Johan	Stockerau	eventcache	2	8
Gabriela	Linz	multi	1	9
Karl	Liberec	tradicional	0,125	1

Závěr

V příspěvku jsme ukázali postupy, kterými je možné řešit i velmi složité logické problémy „Einsteinova typu". Vlastní řešení (zde prezentované v SW Lingo) obdržíme během okamžiku. I když se vlastní formulace především u rozsáhlých úloh může zdát jako poměrně složitá, jedná se pouze o neustále se opakující stejné standardní optimalizační „triky“.

Literatura

[1] Einsteinův hlavolam [online]. [cit. 2011-04-20]. Dostupné z WWW: <http://profuvsvet.ic.cz/view.php?nazevclanku=einsteinuv-hlavolam&cisloclanku=2006100001>.

[2] Geocaching - The Official Global GPS Cache Hunt Site [online]. [cit. 2011-04-20]. Dostupné z WWW: < http://www.geocaching.com/v/default.aspx>.

[3] HLAVOLAM - Einsteinova hádanka [online]. [cit. 2011-04-20]. Dostupné z WWW: <http://jasanek.webpark.cz/hadan1.html>.

[4] CHÝNA, V.: *Naprogramujte si vlastní sudoku řešitel v Lingu*. Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníků. Praha: Oeconomica, 2008, s. 1--10. ISBN 978-80-245-1405-5.

[5] CHÝNA, V.: *Řešení hlavolamu Harry Potter a princ dvojí krve pomocí optimalizace*. Logos Polytechnikos 2010, ročník 1, číslo 2, Vysoká škola polytechnická Jihlava, ISSN 1804-3682

[6] JABLONSKÝ, J.: *Operační výzkum*. Professional Publishing, Praha 2002. ISBN 80-86419-42-8.

[7] KOPA, M., CHOVANEC, P.: *A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure,* Kybernetika, 44, 2 (2008), s. 243-258.

[8] KOPA, M., POST, T.: *A portfolio efficiency test based on FSD optimality*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 44, 5 (2009), s. 1103-1124.

[9] KOTLÁN, J., KOTLÁN P., VITTOVÁ K.: *Testy obecných studijních předpokladů a základy logiky – 1. Díl*, Institut vzdělávání SOKRATES, 2009, 8. přepracované a aktualizované vydání, ISBN 978-80-86572-57-4

[10] PELIKÁN, J.: *Diskrétní modely v operačním výzkumu*. Professional Publishing, Praha 2001. ISBN 80-86419-17-7.

[11] Vzor přijímací zkoušky na MFF UK, studijní program Informatika

Solving Puzzles of Einsten’s Type Using Optimizing

Abstract

In the contribution are presented methods for solving puzzles of Einstein’s type (There live 5 people of different nations in 5 different houses,...). In the less difficult problems we can use formulation using absolute values, more difficult puzzles lead to assignment problem. Source code in SW lingo is enclosed.

Key words

Einstein's puzzle, assignment problem, Lingo

Kontaktní údaje

RNDr. Ing. Vladislav Chýna
Vysoká škola ekonomická v Praze – katedra ekonometrie
nám. W. Churchilla 4
130 67 Praha 3

Konvergence evropských ekonomik

Petr Musil

Vysoká škola polytechnická Jihlava - Katedra ekonomických studií

Abstrakt

Otázka ekonomické konvergence bývá předmětem výzkumu poměrně často, obzvláště pokud se jedná o konvergenci ekonomik, jejichž země se postupně stávají členy Evropské unie. Právě argument dohánění životní úrovně západních zemí Evropské unie je používán jako argument pro vstup do EU. Ekonomická teorie však předpovídá, že země s nižší ekonomickou úrovní mají tendenci dohánět země vyspělejší, tedy za jinak srovnatelných okolností. Cílem toho příspěvku je ukázat, jak k sobě konvergovaly vybrané evropské ekonomiky, a to od poloviny devadesátých let minulého století až do současnosti. Nejprve bude představen teoretický model, který konvergenci předpovídá, a následně na reálných datech ukážeme, zda modelu odpovídá i reálný ekonomický vývoj.

Klíčová slova

Ekonomická konvergence, Evropská unie, Solowův model

Úvod

Ekonomická konvergence, tj. dohánění zemí relativně vyspělých zeměmi, které mají nižší životní úroveň, je předmětem zkoumání zejména v souvislosti s prohlubující se ekonomickou kooperací a integrací. Ekonomická teorie předpovídá, že životní úroveň, měřená například podle HDP na osobu, se bude zvyšovat rychlejším tempem v zemích, jejichž ekonomická vyspělost je nižší, než v zemích vyspělých. Tam by se naopak ekonomická úroveň měla zvyšovat tempem pomalejším.

Jde o jeden ze závěrů neoklasického růstového modelu, který známe pod názvem Solowův model ekonomického růstu. Cílem tohoto příspěvku je tento model představit, respektive vysvětlit, proč by právě méně vyspělé země měly vykazovat rychlejší tempo růstu HDP na osobu než země rozvinuté a ukázat na reálných datech, zda jsou předpovědi Solowova modelu v souladu se skutečností a případně se zamyslet nad faktory, které by potenciálně mohly způsobit rozpor mezi teorií a reálným ekonomickým vývojem. K porovnání teorie a skutečnosti budou použita data vybraných ekonomik Evropské unie, nabízí se porovnání zemí, které přistoupily k EU v roce 2004 na jedné straně a země původní Evropské patnáctky. K tomuto porovnání budou použita data získaná z databáze Eurostatu a bude využit ukazatel HDP na osobu podle parity kupní síly, čímž je odfiltrován vliv rozdílnosti cenových hladin v jednotlivých zemích.

Solowův model

Solowův model ekonomického růstu pracuje s neoklasickou produkční funkcí, a to ve dvou formách – extenzivní a intenzivní. Extenzivní forma produkční funkce zobrazuje vztah mezi celkovou zásobou kapitálu v ekonomice a celkovým ekonomickým výstupem. Naproti tomu forma intenzivní zobrazuje vztah mezi kapitálovou zásobou v ekonomice přepočtenou na jednotku pracovní síly a výstupem na jednotku pracovní síly. Zjednodušeně tedy můžeme říci, že extenzivní forma produkční funkce řeší celkový výstup ekonomiky, zatímco intenzivní forma výstup na osobu, tedy veličinu, o kterou se budeme opírat. Obě produkční funkce pracují s fixním množstvím pracovní síly a měnícím se množstvím kapitálu, respektive kapitálu na pracovníka.

Pro naše účely tedy využijeme intenzivní formu produkční funkce, protože tím odstraníme vliv nestejně velké zásoby pracovní síly a kapitálu v jednotlivých zemích a získáme tím lepší obrázek o ekonomické úrovni v daných zemích.

Produkční funkce, se kterou budeme pracovat, má další charakteristiky:

- množství pracovní síly budeme pro danou produkční funkci považovat za fixní
- produkční funkce obsahuje konstantní výnosy z rozsahu, tj. pokud dojde ke stejné procentní změně obou vstupů, pak dojde ke stejné procentní změně výstupu
- mezní produktivita kapitálu je klesající, tj. každá další jednotka kapitálu přinese stále menší přírůstek výstupu

Intenzivní produkční funkci tedy můžeme vyjádřit jako

$y = f(k)$, kde:

y... výstup na pracovníka

k... kapitálová zásoba na pracovníka

Solowův model pracuje s dalšími funkcemi, a to s funkcí úspor a funkcí opotřebení kapitálu. Formálně lze tyto funkce zapsat následovně.

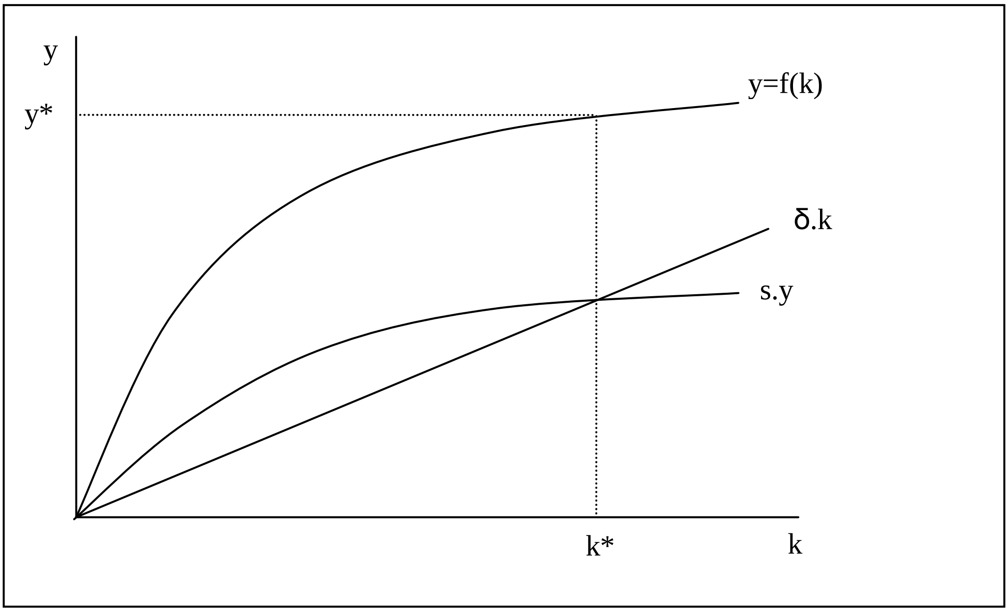
$S = s.f(k)$, $\delta k = f(\delta, k)$, kde:

S... úspory na pracovníka

s... míra úspor, tj. podíl produktu, který je uspořen

δ... míra opotřebení kapitálu, tj. podíl kapitálové zásoby, který se každý rok opotřebuje

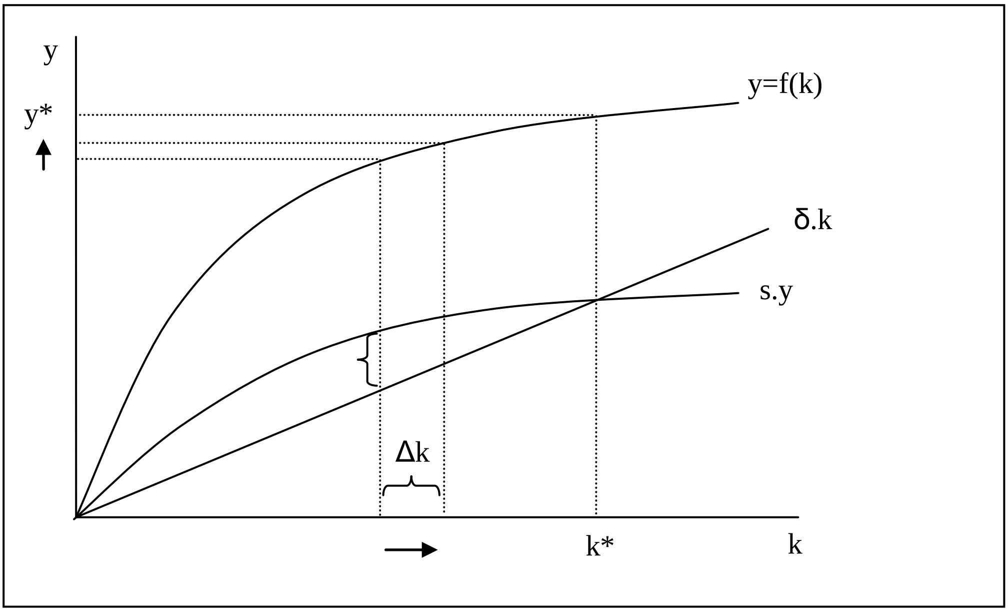
Podstatou Solowova růstového modelu je situace, kdy ekonomika dosahuje nebo se ocitne v tzv. „stálém stavu“ (steady-state). Jde o dosažení takového bodu v produkční funkci, kdy se za jinak stejných okolností nemění jak kapitálová zásoba na pracovníka, tak výstup na pracovníka. Jinými slovy, pokud ekonomika dosáhne svého stálého stavu, pak je růst produktu na pracovníka nulový, stejně jako růst kapitálové zásoby na pracovníka. Zároveň ve stabilním stavu platí, že je v ekonomice vytvořen právě takový objem úspor, který přesně pokrývá potřeby kapitálu k jeho obnovení, tedy veškeré vytvořené úspory jsou použity na obnovu kapitálu, který se za uplynulé období opotřeboval. Takovou situaci zachycuje následující obrázek.



Obr. 1: Stálý stav v Solowově modelu

Změna produktu na osobu pak za jinak stejných okolností závisí na tom, jaká je výchozí kapitálová zásoba na pracovníka v dané ekonomice. Pokud ve výchozím období disponuje ekonomika kapitálovou zásobou, která je menší než je ta ve stálém stavu (tj. menší než k*), pak dojde k ekonomickému růstu. Je to dáno tím, že v takové situaci jsou úspory větší, než jaké jsou třeba k obnově kapitálové zásoby. Přebytečné úspory jsou tedy využity pro financování čistých investic, tedy investic, které vedou ke zvětšení kapitálové zásoby na pracovníka. Spolu s kapitálovou zásobou tedy vzroste i produkt na pracovníka.

Je-li situace opačná, tedy disponuje-li ekonomika ve výchozím období vyšší kapitálovou zásobou, než jaká odpovídá té ve stálém stavu (tj. větší než k*), pak vytvořené úspory nestačí k obnově kapitálové zásoby a ta tedy začne klesat. Spolu s kapitálovou zásobou na pracovníka pak klesá i produkt na pracovníka. Dosahování stálého stavu zachycuje následující obrázek.



Obr. 2: Proces dosahování stálého stavu v Solowově modelu

Pokud tedy dochází k tomu, že ekonomika spěje do stálého stavu „zleva“, vzhledem ke klesající mezní produktivitě kapitálu se přírůstky výstupu na pracovníka postupně snižují, čímž se snižuje i tempo růstu produktu na pracovníka. Jakmile je stálého stavu dosaženo, růst produktu na pracovníka se zastaví. Podmínku stálého stavu lze formálně zapsat následovně:

$s.y - \delta.k = 0$, po úpravě

$s.y = \delta.k$

Ekonomická konvergence

Jak tedy Solowův model předpovídá ekonomickou konvergenci méně vyspělých zemí k zemím ekonomicky vyspělejším? Nejprve je třeba definovat, jak chápeme méně vyspělou zemi. V Solowově modelu je tím myšlena taková ekonomika, která je relativně hodně vzdálena od svého stálého stavu, tedy ekonomika s poměrně nízkou zásobou kapitálu na pracovníka. Na druhé straně, za vyspělou ekonomiku považujeme tu, která se nachází velmi blízko svého stálého stavu nebo se nachází přímo ve stálém stavu. Kapitálová zásoba v takové ekonomice je poměrně vysoká.

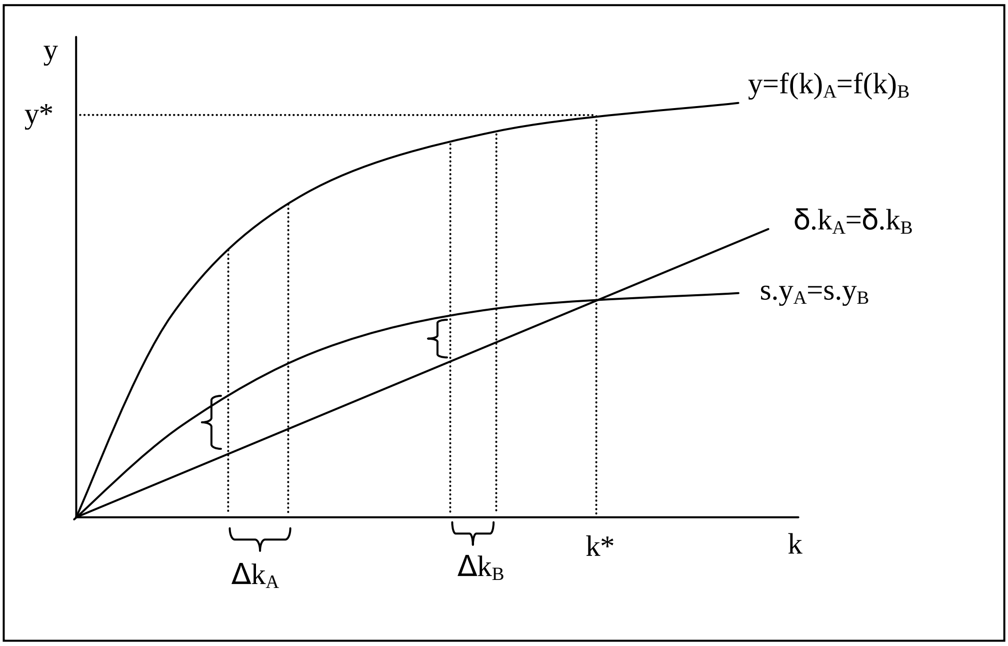
Co z toho vyplývá, již snadno dovodíme. Ta země, která disponuje kapitálovou zásobou blízko svého stálého stavu má již jen velmi malý prostor pro zvyšování kapitálové zásoby (převis úspor nad obnovovacími investicemi je velmi malý), a tím pádem má i malý růstový potenciál. Produkt na pracovníka tak vzroste jen velmi málo. Naproti tomu ta země, která je vzdálena od svého stálého stavu disponuje větším převisem úspor nad obnovovacími investicemi, a proto v takové zemi budou čisté investice vyšší, více vzroste kapitálová zásoba a i více se zvýší produkt na pracovníka. Země, která je vzdálenější od svého stálého stavu tak roste rychleji.

Konvergence ale znamená, že ekonomické úrovně zemí se stejnou nebo velmi srovnatelnou produkční funkcí dříve či později dosáhnou stejné ekonomické úrovně. Znamená to, že země se srovnatelnými produkčními funkcemi konvergují ke svým stálým stavům, kde se jejich ekonomické úrovně vyrovnají. Aby ke konvergenci skutečně došlo, je nutné, aby byly splněny určité podmínky, a to zejména:

- srovnatelné produkční funkce
- stejná míra úspor
- stejná míra opotřebení kapitálu
- srovnatelné „jiné“ okolnosti

Setkáme se totiž i s případy, kdy ekonomicky zaostalejší země k těm rozvinutým nekonvergují. Tato skutečnost bývá vysvětlována právě tím, že nejsou splněny výše uvedené podmínky a zejména pak ony „jiné“ okolnosti, mezi něž můžeme zahrnout například politický režim, vyspělost institucí (především neformálních), úroveň vzdělanosti, úroveň zdravotní péče, tempo růstu populace apod. Solowův model tak předpovídá pouze tzv. „podmíněnou konvergenci“.

Jak ke konvergenci v Solowově modelu dochází, znázorňuje následující obrázek.



Obr. 3: Konvergence v Solowově modelu

Na uvedeném obrázku je znázorněna situace dvou zemí A, B. Obě země mají stejnou produkční funkci, stejnou míru úspor i míru opotřebení kapitálu. Jediné, v čem se obě země liší, je výchozí zásoba kapitálu na pracovníka. Země A má tuto zásobu nižší a nachází se tak dále od stálého stavu. Země A tak zaznamená vyšší přírůstek kapitálu na pracovníka a vyšší přírůstek produktu na pracovníka než země B. Dojde však k tomu, že obě země se budou k sobě ve své ekonomické úrovni přibližovat, až obě dospějí do stálého stavu, který mají rovněž stejný. Jakmile do tohoto stavu dospějí, budou disponovat kapitálovou zásobou na pracovníka k* a dosahovat ekonomické úrovně y*.

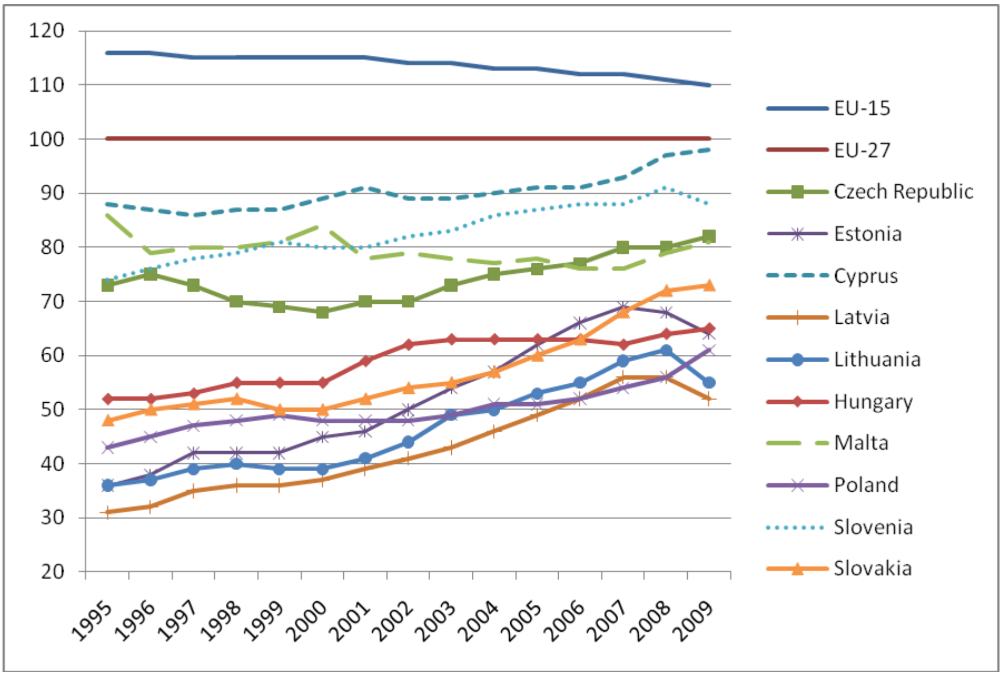
Pro pořádek je třeba dodat, že výše popsaný princip ekonomické konvergence je tzv. podmíněnou konvergencí. Jde o situaci, kdy ekonomiky k sobě konvergují za jinak stejných okolností, tj. při stejných (srovnatelných) produkčních funkcích, stejném (srovnatelném) institucionálním prostředí, srovnatelné vzdělanosti atd.

Ekonomická konvergence v Evropě

Nyní se podíváme, zda k ekonomické konvergenci dochází ve vybraných evropských zemích. Nabízí se zaměřit pozornost na země Evropské unie, před jejím rozšířením v roce 2004, tedy na země EU-15 a na druhé straně na země, které Evropskou unii rozšířili právě v roce 2004 (tedy EU-10). Budeme předpokládat, že k ekonomické konvergenci dochází, protože:

- výchozí zásoba kapitálu v zemích EU-10 byla výrazně nižší (vesměs postsocialistické státy, které mimo jiné trpěly nedostatkem kapitálu)
- produkční funkce lze považovat za víceméně srovnatelné (i když v zemích EU-10 byla počáteční technologická úroveň opět výrazně nižší – což by ale mělo konvergenci jen urychlit)
- politické režimy jsou srovnatelné
- vyspělost institucí sice různá, což by mělo konvergenci zpomalovat
- vzdělanostní struktura srovnatelná

Jak tedy ekonomická konvergence ve vybraných evropských zemích probíhala, nám ukazuje následující obrázek. V obrázku je znázorněn vývoj ekonomické úrovně, vyjádřené pomocí indexu (EU-27=100 v každém roce) a přepočtené podle parity kupní síly.



Graf 1: Ekonomická konvergence zemí EU-15 a EU-10 v letech 1995 – 2009 (EU-27=100). Zdroj: Eurostat 2011

Vývoj na grafu víceméně naplňuje předpovědi ekonomické teorie, resp. Solowova modelu. Ekonomická úroveň zemí EU-10 postupně konverguje k ekonomické úrovni EU-15, což lze vidět v tom, že křivky ekonomických úrovní zemí EU-10 mají rostoucí charakter, zatímco zemí EU-15 charakter klesající.

Zároveň si lze všimnout i dalšího faktu, který předpovídá Solowův model. Největší zmenšení mezery v ekonomické úrovni mezi vyspělými a rozvíjejícími se zeměmi zaznamenaly ty země, které na počátku vykazovaly nejnižší startovací úroveň produktu na osobu, tedy např. pobaltské země, ale třeba i Slovensko. Naopak nejpomaleji konverguje Kypr, Slovinsko či Malta, tedy země, které měly poměrně vysokou startovací úroveň produktu na osobu.

Závěr

V příspěvku byl představen Solowův model ekonomického růstu v souvislosti s ekonomickou konvergencí. Ukázali jsme, jak ekonomická teorie vysvětluje sbližování ekonomik s rozdílnou úrovní produktu na osobu, ale se srovnatelnými produkčními funkcemi a dalšími okolnostmi, které ovlivňují celkovou produktivitu výrobních faktorů v dané zemi.

Dále jsme pomocí reálných dat ukázali, jak probíhá ekonomická konvergence mezi ekonomikami původní Evropské patnáctky a zeměmi, které Evropskou unii rozšířily v roce 2004. Zjistili jsme, že nejrychleji k ekonomikám původních zemí EU konvergují ty, které měly nízkou výchozí úroveň HDP na osobu, přesně jak předpovídá Solowův model.

Literatura

[1] EUROSTAT 2011: *Economic database*. Dostupné na: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/tgm/download.do?tab=table&plugin=1&language=en&pcode=tsieb010 (29.4.2011).

[2] HOLMAN, R. 2010.: *Makroekonomie středně pokročilý kurz*. Praha. C.H.Beck 2010. 424 s. ISBN 978-80-7179-861-3.

[3] MANKIW, N.G. 2010: *Macroeconomics*. Worth Publishers 2010. 608 s. ISBN 9781429218870.

The Convergence of European Economies

Abstract

The question of economic convergence is an often issue of economic research, especially the convergence of new (or future) member states of the European Union. The convergence of economic welfare is being used as an argument to convince the new potential member states to join the EU. Economic theory despite that predicts that the developing economies would converge the developed ones other things being equal. The aim of this article is to introduce the economic convergence of specific European economies since the half of the nineties. Firstly there will be introduced the theoretical model that predicts the economic convergence, and then it will be compared to the economic development of selected countries.

Key words

Economic convergence, European Union, Solow growth model

Kontaktní údaje

Ing. Petr Musil, Ph.D.
Katedra ekonomických studií
Vysoká škola polytechnická Jihlava
Tolstého 16
586 01 Jihlava
e-mail: petrmusil1977@gmail.com

Existencia efektu dní týždňa pri analýze burzových výnosov a výmenných kurzov s využitím modelov TGARCH*

Michaela Chocholatá

Ekonomická univerzita v Bratislave, SR

Abstrakt

Príspevok skúma vplyv efektu jednotlivých dní týždňa na úroveň a volatilitu denných hodnôt logaritmických výnosov burzových indexov (NIKKEI, S&P500, CAC40 a DAX) a výmenných kurzov (USD/EUR, JPY/EUR a JPY/USD) za obdobie 1.1.2000 – 30.3.2011 s využitím modelov autoregresnej podmienenej heteroskedasticity TGARCH. Na základe výsledkov možno prijať záver, že kým vplyv tohto efektu na úroveň analyzovaných logaritmických výnosov bol potvrdený len v prípade logaritmických výnosov burzových indexov S&P500 a DAX, jeho vplyv na volatilitu bol preukázaný v piatich analyzovaných prípadoch (NIKKEI, S&P500, DAX, JPY/EUR a JPY/USD).

Kľúčové slová

Logaritmické výnosy, podmienená heteroskedasticita, model TGARCH

Úvod

Časové rady burzových indexov a výmenných kurzov možno zaradiť medzi finančné časové rady zaznamenávané s vysokou frekvenciou, pre ktoré je typická nestacionarita, čo znamená, že daný časový rad nemá tendenciu vrátiť sa k nejakej konštantnej hodnote, prípadne k trendu. Typickou črtou časových radov prvých diferencií (označovaných aj ako časové rady výnosov) je v čase sa meniaca variabilita/volatilita alebo tzv. zhlukovanie volatility. Možno sa domnievať, že táto variabilita je spôsobená volatilitou na finančných trhoch, ktoré veľmi citlivo reagujú na rôzne fámy, akékoľvek politické zmeny, zmeny v monetárnej či fiškálnej politike. Je teda zrejmé, že s využitím tradičného prístupu Boxovej-Jenkinsovej metodológie ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) si nevystačíme. Lineárne modely ARMA, resp. ARIMA vychádzajú totiž z predpokladu, že podmienená stredná hodnota sa síce v čase mení, podmienený rozptyl je však konštantný, čo nezodpovedá realite.

Hoci sa problematike adekvátneho modelovania finančných časových radov venovali viacerí autori (napr. v 60. rokoch 20. storočia Mandelbrot [16] a Fama [10] poukázali na skutočnosť, že „veľké cenové zmeny vyvolávajú ďalšie veľké cenové zmeny, kým

---

* Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0181/10 „Hybridné modely prognózovania finančných časových radov“.

malé cenové zmeny vyvolávajú malé cenové zmeny“), prvým formálnym modelom, ktorý pripúšťa nestacionaritu v rozptyle však bol až Englem [9] navrhnutý ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) model.

V súčasnosti už existuje veľké množstvo rôznych modifikácií modelov ARCH (pozri napr. [3], [4], [11]), pričom najznámejšou modifikáciou je jeho zovšeobecnená verzia - model GARCH (Generalized ARCH), ktorý bol vyvinutý Bollerslevom [6]. Vzhľadom na to, že ani modely ARCH ani modely GARCH neboli schopné zachytiť rôzny vplyv pozitívnych a negatívnych šokov (tzv. asymetrické efekty) na podmienenú volatilitu, prichádza Nelson [17] s modelom EGARCH (Exponential GARCH) a Zakoian [22], resp. Glosten, Jagannathan a Runkle [13] s modelom T(G)ARCH (Threshold (G)ARCH), resp. GJR - GARCH.

Takisto sa možno v literatúre stretnúť s množstvom článkov a štúdií testujúcich vplyv napr. pondelkového efektu, efektu jednotlivých dní týždňa, efektu neobchodných dní, efektu jednotlivých mesiacov, či fázy hospodárskeho cyklu jednak na úroveň burzových výnosov, či výnosov výmenných kurzov, a jednak na úroveň volatility. K záveru, že piatkové výnosy sú v porovnaní s priemernými výnosmi vyššie a pondelkové nižšie, dospel French v [12]. Na existenciu efektu konca mesiaca poukázal vo svojej práci Ariel [2]. Analýze pondelkového efektu, efektu konca mesiaca, efektu pondelkov v druhej polovici mesiaca a efektu rôznej fázy hospodárskeho cyklu pre viaceré americké burzové indexy s využitím modelu GARCH sa venoval Rosenberg v [18]. Existenciu efektu konca roka, efektu konca mesiaca i efektu jednotlivých dní týždňa potvrdili Blenman, Chatterjee a Ayadi [5] pre burzové indexy vybraných krajín Latinskej Ameriky, pričom aplikovali robustnú ekonometrickú metodológiu EGARCH-M. Apolinario a kol. [1] analyzovali existenciu efektu dní týždňa v prípade burzových indexov trinástich európskych krajín s využitím modelov GARCH a T-ARCH. Kým vplyv tohto efektu na úroveň burzových výnosov nebol potvrdený, jeho vplyv na úroveň volatility sa podarilo preukázať takmer vo všetkých prípadoch. Rublíková [19] aplikovala ARCH a GARCH modely a analyzovala efekt dní týždňa pre časový rad výnosov výmenného kurzu SKK/USD, pričom preukázala vyššie hodnoty výnosov pre utorok v porovnaní s priemernou úrovňou. Prehľad ďalších štúdií venujúcich sa danej problematike možno nájsť i v každej z vyššie citovaných publikácií.

Existuje viacero možných vysvetlení existencie jednotlivých efektov (osobitne tzv. pondelkového efektu), ako napr. chyby merania, vplyv diania na iných väčších trhoch, koncentrácia určitých investičných rozhodnutí, zverejnenie dôležitých firemných správ po piatkovej uzávierke, časový nesúlad medzi nákupom a predajom aktív, či posúdenie vzťahu medzi rizikom a výnosom a pod. (pozri napr. [7]).

Z pohľadu racionálneho investovania predstavuje výška výnosu len jednu časť rozhodovacieho procesu. Ďalším podstatným faktorom, ktorý treba brať do úvahy, je výška rizika, resp. volatilita výnosov. Dôležité je vedieť, či sa volatilita výnosov ako aj veľkosť výnosu mení v závislosti od jednotlivých dní týždňa. Objavenie a potvrdenie určitých „zákonitostí“ vo vývoji volatility môže byť totiž užitočné z viacerých dôvodov, napr. na účely hedgingu, príp. špekulatívne obchody, či pri oceňovaní určitých aktív a pod.

Predmetom tohto príspevku je analýza „uzatváracích“ (angl. close) denných hodnôt vybraných svetových burzových indexov (japonského burzového indexu NIKKEI, amerického indexu S&P500, francúzskeho indexu CAC40 a nemeckého indexu DAX) a denných hodnôt výmenných kurzov (amerického dolára voči euru - USD/EUR, japonského jenu voči euru a americkému doláru -JPY/EUR a JPY/USD) za obdobie 1.1.2000 – 30.3.2011, pričom údaje o burzových indexoch boli získané z internetovej stránky [25] a údaje o výmenných kurzoch z kanadskej internetovej adresy University of British Columbia [24]. Pre analýzu boli použité len tie údaje, pre ktoré boli definované hodnoty všetkých analyzovaných časových radov, čo predstavovalo spolu 2555 údajov. Analýza bola zrealizovaná s využitím nelineárnych modelov TGARCH vrátane skúmania existencie efektu jednotlivých dní týždňa tak pre úroveň burzových výnosov, resp. výnosov výmenných kurzov, ako aj pre ich volatilitu, a to prostredníctvom ekonometrického softvéru EViews 5.1 s cieľom poukázať na možnosť využitia výsledkov analýz pri investovaní.

Lineárne a nelineárne modely volatility

Typickou črtou finančných časových radov, tj. časových radov burzových indexov, resp. výmenných kurzov je ich nestacionarita, ktorú je možné testovať pomocou niektorého z testov existencie jednotkového koreňa, napr. pomocou Phillipsovho-Perronovho testu (o testoch jednotkového koreňa bližšie pozri napr. [8], [11], [20]). Najčastejším výsledkom je potvrdenie existencie jedného jednotkového koreňa, pričom za účelom stacionarizácie daného časového radu tento diferencujeme.

Predmetom záujmu analytikov však nie sú spravidla nestacionárne časové rady úrovne, ale časové rady výnosov, ktoré sa vyznačujú vysokou volatilitou. Analýzy sa zvyčajne realizujú na logaritmických transformáciách jednotlivých časových radov[1]. Ak označíme ako P_t cenu aktíva v čase t, logaritmy výnosov r_t možno vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$r_t = \ln(P_t / P_{t-1}) \tag{1}$$

Logaritmy výnosov (1) možno vo všeobecnosti zapísať v tvare modelu ARMA(m,n):

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^{m} \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t \tag{2}$$

kde ω_0 predstavuje konštantu, $\phi_j \left(j = 1, 2, \dots m\right)$ a $\theta_k \left(k = 1, 2, \dots n\right)$ sú parametre zodpovedajúceho ARMA(m, n) modelu a ε_t má charakter náhodnej, resp. nepredikovateľnej zložky, šoku. O náhodnej zložke ε_t sa predpokladá, že má podmienene normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a rozptylom h_t

[1] Problematike a dôvodom použitia logaritmickej transformácie časových radov sa bližšie venuje napr. [20].

založenom na informačnej množine Ω_{t-1} obsahujúcej všetky relevantné informácie až do obdobia t – 1.

Dôležitým krokom je ďalej špecifikácia vhodného modelu podmienenej heteroskedasticity pre modelovanie podmieneného rozptylu h_t. V základnom modeli podmienenej heteroskedasticity ARCH(q), ktorý prvýkrát prezentoval Engle, pozostáva podmienený rozptyl h_t z konštanty a informácií o volatilite pozorovanej v predchádzajúcich periódach (tzv. ARCH členy):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \tag{3}$$

Podmienený rozptyl h_t v Bollerslevovom GARCH(p, q) modeli, kde p predstavuje rád GARCH člena a q je rád ARCH člena, je daný nasledujúcim vzťahom

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \tag{4}$$

Nezápornosť podmieneného rozptylu v modeloch (3) a (4) je zabezpečená prostredníctvom podmienok kladených na hodnoty parametrov α_0, α_i a β_i, pre ktoré musí platiť $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ pre i = 1, 2,…q a $\beta_i \geq 0$ pre i = 1,2,…p.

Pri analýze finančných časových radov sa však možno stretnúť s rôznymi asymetrickými efektmi. Na zachytenie rôzneho vplyvu pozitívnych a negatívnych šokov alebo iných typov asymetrie na úroveň podmieneného rozptylu bolo v poslednom období vyvinutých množstvo nelineárnych modifikácií modelov triedy ARCH, pričom medzi najznámejšie patria model EGARCH a model TGARCH, resp. GJR – GARCH[2].

Modely TGARCH, resp. GJR - GARCH boli nezávisle prezentované Zakoianom a trojicou autorov Glosten, Jagannathan a Runkle. Zovšeobecnená špecifikácia podmieneného rozptylu v modeli TGARCH (p, q) má tvar:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{t-i}^- \tag{5}$$

kde $I_{t-i}^- = \begin{cases} 1, ak\ \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0, ak\ \varepsilon_{t-i} > 0 \end{cases}$, z čoho je zrejmý odlišný vplyv tzv. pozitívnych šokov $\varepsilon_{t-i} > 0$ a negatívnych šokov $\varepsilon_{t-i} < 0$ na podmienený rozptyl. Vplyv pozitívnych šokov je vyjadrený hodnotou α_i, vplyv negatívnych šokov hodnotou $\alpha_i + \gamma_i$. Ak $\gamma_i > 0$, znamená to, že negatívne šoky zvyšujú volatilitu a hovoríme o prítomnosti

[2] Vzhľadom k tomu, že v aplikačnej časti sa budeme venovať modelu TGARCH, bližšie popíšeme práve tento model.

tzv. pákového (leverage) efektu i – teho rádu. Ak $\gamma_i \neq 0$, hovoríme o asymetrickom vplyve šokov. Pre zabezpečenie nezápornosti podmieneného rozptylu h_t je nutné splnenie nasledovných predpokladov: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i + \gamma_i \geq 0$ pre i = 1, 2,…q a $\beta_i \geq 0$ pre i = 1,2,…p.

Testovanie existencie efektu jednotlivých dní týždňa

Jednou z najčastejšie identifikovaných sezónnych anomálií pri analýze časových radov výnosov je tzv. efekt jednotlivých dní týždňa. Vplyv efektov jednotlivých dní týždňa na úroveň logaritmických výnosov možno testovať pomocou zahrnutia príslušných umelých premenných do rovnice úrovne (2) a ich vplyv na volatilitu zahrnutím rovnakých umelých premenných do rovnice podmieneného rozptylu v tvare napr. (3), (4) alebo (5). Pre súčasné testovanie tohto vplyvu je potrebné zahrnutie umelých premenných súčasne do rovnice úrovne (2) a do niektorej z rovníc podmieneného rozptylu (3) - (5). Umelé premenné označené D_{rt} $(r = 2, 3, 4, 5)$ zodpovedajú jednotlivým obchodným dňom s výnimkou pondelka, t. j. utorku, strede, štvrtku a piatku, pričom nadobúdajú hodnotu 1 v príslušnom dni a 0 v ostatných dňoch. Rovnica úrovne (2) po zahrnutí umelých premenných má tvar

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^{p} \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \varepsilon_{t-k} + \sum_{r=2}^{5} \Pi_r D_{rt} + \varepsilon_t \tag{6}$$

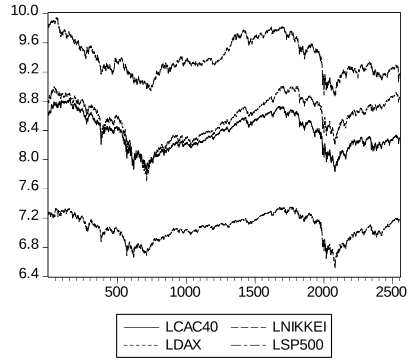
a rovnicu podmieneného rozptylu v tvare (5), keďže tento bude predmetom analýz v aplikačnej časti, možno zapísať nasledovne:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{t-i}^- + \sum_{r=2}^{5} \pi_r D_{rt} \tag{7}$$

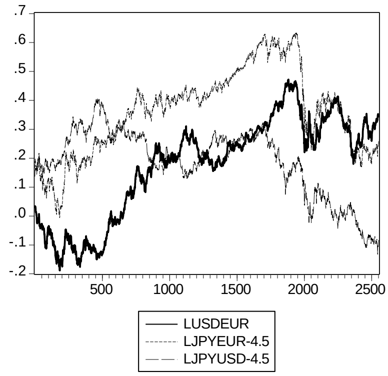
pričom Π_r, π_r pre $r = 2,3,4,5$ predstavujú parametre odrážajúce vplyv efektov jednotlivých dní týždňa na úroveň, resp. podmienený rozptyl logaritmických výnosov.

Empirické výsledky analýzy sezónnych efektov

Predmetom analýzy sú logaritmické transformácie časových radov denných hodnôt vybraných burzových indexov (NIKKEI, S&P500, CAC40 a DAX) a denných hodnôt výmenných kurzov (USD/EUR, JPY/EUR a JPY/USD) za obdobie 1.1.2000 – 30.3.2011, čo predstavuje 2555 údajov. Priebeh logaritmických transformácií jednotlivých časových radov burzových indexov a výmenných kurzov je znázornený v grafoch 1 a 2, z ktorých je zrejmý ich nestacionárny priebeh.



Graf 1 - Logaritmické transformácie časových radov burzových indexov



Graf 2 - Logaritmické transformácie časových radov výmenných kurzov

Existencia jedného jednotkového koreňa I(1), t.j. nestacionárny charakter týchto časových radov, bol potvrdený aj na základe Phillipsovho-Perronovho testu (PP – testu) jednotkového koreňa, ktorého výsledky pre jednotlivé časové rady sú v tabuľke 1. Predmetom ďalšej analýzy sú teda stacionárne časové rady prvých diferencií vypočítaných podľa vzťahu (1), t.j. časové rady logaritmických výnosov, pričom do rovnice úrovne (2) boli v jednotlivých prípadoch zahrnuté nasledovné členy AR, resp. MA: r_NIKKEI – AR (11); r_S&P500 – AR(1), AR(2), MA(2); r_CAC40 – AR(5), MA(1), MA(2); r_DAX – AR(5); r_USD/EUR – bez členov AR a MA; r_JPY/EUR – AR(5); r_JPY/USD – MA(1).

Tab. 1 – Výsledky PP – testu jednotkového koreňa pre logaritmické transformácie analyzovaných časových radov

Logaritmická transformácia čas. radu	Úroveň			1. diferencie
	trend i konštanta	konštanta	bez trendu a bez konštanty	trend i konštanta
NIKKEI	-1,979	-2,048	-0,915	-52,334***
S&P500	-1,949	-1,994	-0,130	-55,556***
CAC40	-1,673	-1,758	0,541	-53,533***
DAX	-1,720	-1,374	0,042	-51,642***
USD/EUR	-2,247	-0,982	-0,087	-50,832***
JPY/EUR	-1,189	-1,629	0,185	-51,994***
JPY/USD	-2,354	-0,532	-0,668	-53,153***

*Poznámka: Symbol *** označuje zamietnutie hypotézy H_0 pokiaľ ide o existenciu jednotkového koreňa na hladine významnosti 1 %.*

Po identifikovaní členov AR, resp. MA sme parametre modelu (6) pre jednotlivé logaritmické výnosy odhadli pomocou metódy najmenších štvorcov (MNŠ) s využitím Neweyho-Westovho heteroskedasticky i autokorelačne konzistentného (HAC) estimátora pre kovariačné matice (bližšie pozri napr. [5]), pričom efekt jednotlivých dní týždňa nebol potvrdený ani v jednom prípade. Výsledky testu na nekorelovanosť druhých mocnín rezíduí z týchto modelov (Ljungova-Boxova Q-štatistika), testu Lagrangeových multiplikátorov (ARCH LM test) a testu normality (Jarqueho-Berov test) pre jednotlivé časové rady logaritmických výnosov jednoznačne potvrdzujú existenciu autoregresnej podmienenej heteroskedasticity a sú uvedené v tabuľke 2.

V ďalšom kroku sme preskúmali vplyv efektu jednotlivých dní týždňa súčasne na úroveň i volatilitu logaritmických výnosov zahrnutím príslušných umelých premenných do rovnice úrovne aj do rovnice podmieneného rozptylu. Parametre modelov (6) a (7) boli odhadované pomocou Marquardtovho optimalizačného algoritmu umožňujúceho výpočet Bollerslevovho-Wooldridgeovho heteroskedasticky konzistentného estimátora pre kovariančné matice (bližšie pozri napr. [5], [23]). Informácia o vhodnej štruktúre modelu TGARCH v jednotlivých prípadoch, o štatistickej významnosti parametrov zachytávajúcich vplyv jednotlivých dní týždňa na úroveň i volatilitu logaritmických výnosov je spolu s výsledkami testov štandardizovaných rezíduí na nekorelovanosť až do oneskorenia 200 (Ljungova-Boxova Q-štatistika)[3], existenciu zvyškovej heteroskedasticity (ARCH LM test) a normality (Jarqueho-Berov test) súčasťou tabuľky 3.

Tab. 2 – Vybrané výsledky testov rezíduí

	r_NIKKEI	r_S&P500	r_CAC40	r_DAX	r_USD/EUR	r_JPY/EUR	r_JPY/USD
$Q^2(1)$	169,90 ***	186,30 ***	133,95 ***	93,88 ***	4,48 **	38,72 ***	27,31 ***
LM(1)	169,67 ***	186,03 ***	133,75 ***	93,74 ***	4,47 **	38,67 ***	27,26 ***
J-B	4325,6 ***	4655,9 ***	3101,8 ***	2761,9 ***	1090,4 ***	4063,4 ***	1420,6 ***

*Poznámka: Symbol ***, **, * označuje zamietnutie hypotézy H_0 pokiaľ ide o nekorelovanosť druhých mocnín reziduí, neexistenciu ARCH efektu a normalitu na hladine významnosti 1 %, 5% a 10%.*

[3] Enders v [8] odporúča testovanie až do oneskorenia T/4, kde T je počet pozorovaní. EViews však umožňuje použiť maximálne oneskorenie 200.

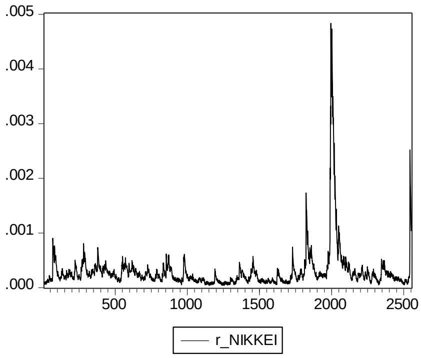
Tab. 3 – Významnosť efektov jednotlivých dní týždňa v rovnici úrovne a podmieneného rozptylu, testy štandardizovaných rezíduí

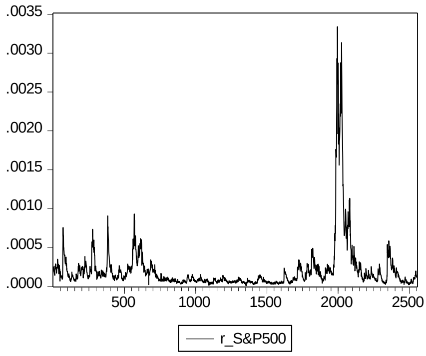
	r_NIKKEI	r_S&P500	r_CAC40	r_DAX	r_USD/EUR	r_JPY/EUR	r_JPY/USD
Rovnica úrovne (6)							
Štat. výz. efekty	žiadny	(-)D_2* (-)D_5***	žiadny	(-)D_3**	žiadny	žiadny	žiadny
Rovnica podmieneného rozptylu (7)							
Štruktúra TGARCH	(1,1) **	(1,2) **	(1,2) ***	(1,2) ***	(1,1) **	(1,1) ***	(1,2) **
Štat. výz. efekty	(-)D_2*** (-)D_3**	(+)D_2*** (+)D_5***	žiadny	(+)D_5**	žiadny	(-)D_2* (-)D_3**	(-)D_3***
Testy štandardizovaných rezíduí							
Q(200)	150,77	227,22*	197,80	211,08	207,86	173,62	213,63
Q^2(200)	185,72	191,73	177,43	206,86	163,65	146,66	157,63
LM(1)	5,19**	0,698	0,383	1,229	0,127	0,274	0,099
J-B	145,64 ***	149,81 ***	69,96 ***	42,80 ***	209,0 ***	663,61 ***	747,49 ***

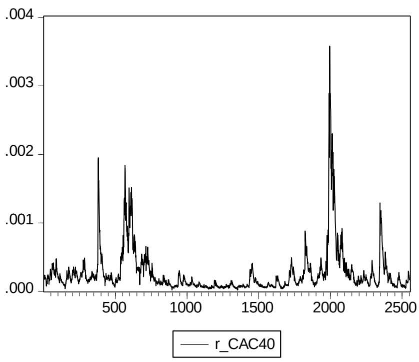
*Poznámka: Symboly (-), (+) označujú záporné, resp. kladné znamienko príslušného štatisticky významného parametra. Symboly ***, **, * označujú zamietnutie hypotézy H_0 na hladine významnosti 1 %, 5% a 10%.*

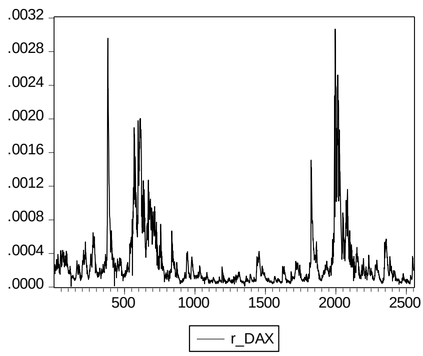
Z výsledkov v tabuľke 3 je zrejmé, že vplyv efektu dní týždňa na úroveň logaritmických výnosov bol potvrdený pre dva analyzované časové rady (r_S&P500 a r_DAX), pričom záporné znamienko štatisticky významných parametrov indikuje nižšiu úroveň týchto logaritmických výnosov v porovnaní s pondelkom. Štatistická významnosť všetkých parametrov (s výnimkou úrovňovej konštanty) v modeli podmieneného rozptylu TGARCH potvrdzuje opodstatnenosť použitia príslušného modelu podmienenej heteroskedasticity so zohľadnením asymetrie vo volatilite. Vplyv efektu dní týždňa na volatilitu logaritmických výnosov bol potvrdený v piatich prípadoch, pričom kladné/záporné znamienka štatisticky významných parametrov svedčia o vyššej/nižšej volatilite v porovnaní s jej pondelkovou hodnotou. Vlastnosti štandardizovaných rezíduí potvrdzujú na hladine významnosti 1% nekorelovanosť a neexistenciu zvyškovej heteroskedasticity, nie sú však normálne rozdelené. Hodnoty Jarqueho-Berovej štatistiky testujúcej normalitu sú však pri aplikácii modelov TGARCH značne nižšie ako v tabuľke 2. Vzhľadom na to, že hypotézu o normálnom rozdelení rezíduí možno vo všetkých prípadoch zamietnuť, výsledky možno považovať za konzistentné len v zmysle kvázi metódy maximálnej vierohodnosti (pozri napr. [11]).

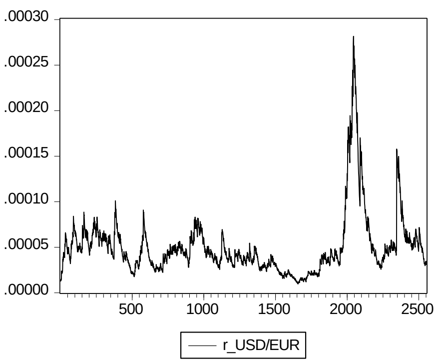
Z hľadiska aplikácie modelov podmienenej heteroskedasticity však nezohráva kľúčovú úlohu prognóza úrovne analyzovaného časového radu, ale prognóza podmieneného rozptylu. Z grafov 3 – 9 je zrejmé, že podmienený rozptyl nie je v čase konštantný, pričom najvyššiu úroveň v prípade všetkých analyzovaných burzových výnosov dosahoval 17.10.2008 a v prípade výnosov výmenných kurzov r_USD/EUR 8.1.2009, r_JPY/EUR 30.10.2008 a r_JPY/USD 23.3.2009. Ak by sme teda pri modelovaní jednotlivých logaritmických výnosov nebrali do úvahy prítomnosť podmienenej heteroskedasticity, malo by to za následok nielen neefektívne odhady jednotlivých parametrov, ale interval spoľahlivosti by nezohľadňoval meniaci sa rozptyl.

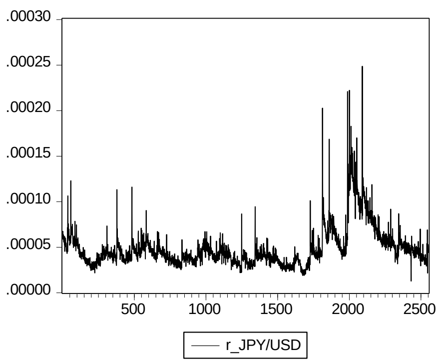


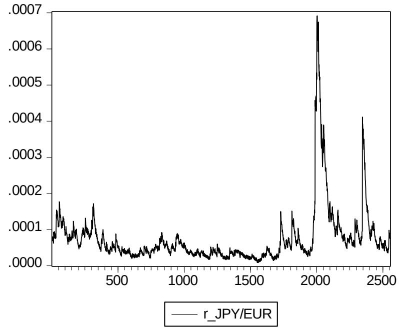












Grafy 3 – 9 Prognózy podmieneného rozptylu logaritmov výnosov

Záver

Na základe uvedených analýz možno tvrdiť, že vplyv efektu dní týždňa s nižšou úrovňou logaritmických výnosov v porovnaní s pondelkovými výnosmi bol potvrdený pre dva časové rady - r_S&P500 a r_DAX. Vplyv efektu dní týždňa na volatilitu logaritmických výnosov bol preukázaný v piatich prípadoch, avšak s rôznymi znamienkami, čo neumožňuje jednoznačný záver ohľadom nižšej, resp. vyššej volatility v porovnaní s jej pondelkovou hodnotou. Získané informácie pre jednotlivé analyzované časové rady môžu byť zaujímavé z pohľadu investora a vhodne využité (vzhľadom na rozdielnu výšku volatility v jednotlivých dňoch týždňa) napr. pri realizácii špekulatívnych obchodov.

Použitie nelineárnych modelov TGARCH umožňujúcich zachytiť vplyv asymetrických efektov sa preukázalo vzhľadom na štatistickú významnosť všetkých parametrov týchto modelov ako oprávnené, o čom svedčia aj grafy 3 – 9 znázorňujúce priebeh v čase sa meniaceho podmieneného rozptylu.

Posúdenie vplyvu efektu jednotlivých dní týždňa na vývoj volatility pri prognózovaní jej budúcich hodnôt, prípadne preskúmanie vplyvu jednotlivých fáz hospodárskeho cyklu na úroveň i volatilitu výnosov bude predmetom ďalších empirických analýz.

Literatúra

[1] APOLINARIO, R. M. C. a kol. *Day of the Week Effect on European Stock Markets*. International Research Journal of Finance and Economics, 2006, č. 2, s. 53 – 70.

[2] ARIEL, R. A. *A Monthly Effect in Stock Returns*. Journal of Financial Economics 18, 1987, č. 1.

[3] ARLT, J. – ARLTOVÁ, M. *Finanční časové řady*. Praha: Grada, 2003.

[4] BERA, A.K. – HIGGINS, M.L. *ARCH Models: Properties, Estimation and Testing*. Journal of Economic Surveys, roč. 7, č. 4, 1993, s. 305 – 366.

[5] BLENMAN, L. P. – CHATTERJEE, A. – AYADI, O. F. *Volatility Persistence, Market Anomalies and Risk in Latin American Equity Markets*. The International Journal of Finance, roč. 17, 2005, č. 2.

[6] BOLLERSLEV, T. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Journal of Econometrics 31, 1986, č. 3.

[7] CHARLES, A. *Does the day-of-the-week effect on volatility improve the volatility forecasts?* Applied Economics Letters 17, 2010, s. 257 – 262.

[8] ENDERS, W. *Applied Econometric Time Series*. New York: John Wiley&Sons, Inc. 1995.

[9] ENGLE, R.F. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica 50, 1982, č. 4.

[10] FAMA, E. F. *The Behavior of Stock Market Prices*. Journal of Business 38, 1965, s. 34 – 105.

[11] FRANSES, P. H. – DIJK, D. van *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[12] FRENCH, K. R. *Stock Returns and the Weekend Effect*. Journal of Financial Economics 8, 1980, č. 1.

[13] GLOSTEN, L. R. – JAGANNATHAN, R. – RUNKLE, D. *Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*. Mimeo, Northwestern University, 1991.

[14] HANČLOVÁ, J. *Testování efektivnosti českého akciového trhu*. Proceedings of FINRISK 2000 – Conference on Financial Risk Management. Žilina: ŽU 2000.

[15] IVANIČOVÁ, Z. a kol. *Modelovanie vybraných problémov slovenskej ekonomiky pred vstupom do Európskej menovej únie (aktuálne metodologické prístupy)*. Bratislava: Vyd. Ekonóm, 2009, 382s.

[16] MANDELBROT, B. *The variation of certain speculative prices.* Journal of Business, 1963, 36, s. 394 – 419.

[17] NELSON, D. *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach.* Econometrica 59, 1991, s. 347-370.

[18] ROSENBERG, M. *The Monthly Effect in Stock Returns and Conditional Heteroscedasticity*. The American Economist 48, 2004, č. 2.

[19] RUBLÍKOVÁ, E. *ARCH and GARCH Models for Daily Exchange Rate of SKK/USD*. Ekonomické rozhľady XXXIII, 2004, č. 3.

[20] VINCÚR, P. a kol. *Úvod do prognostiky*. Bratislava, Sprint 2007, 389 s.

[21] VÝROST, T. – BAUMÖHL, E. *Asymmetric GARCH and the Financial Crisis: A Preliminary Study*. November 2009. Dostupné z WWW:<http://mpra.ub.uni-muenchen.de/27909/1/MPRA_paper_27909.pdf>

[22] ZAKOIAN, J. M.: *Threshold heteroscedastic model*. Mimeo, INSEE, Paris, 1990.

[23] EViews 5 User's Guide

[24] <http://fx.sauder.ubc.ca/>

[25] <http://www.finance.yahoo.com>

Existence of the Day of the Week Effect in Analysis of the Stock Returns and Exchange Rates using the TGARCH model

Abstract

This paper investigates the influence of the day of the week effect on the level and volatility of the daily values of logarithmic stock returns (NIKKEI, S&P500, CAC40 and DAX) and logarithmic exchange rate returns (USD/EUR, JPY/EUR and JPY/USD) during the period 1.1.2000 – 30.3.2011 using the autoregressive conditional heteroscedasticity models TGARCH. While the influence of the above mentioned effect on the level of the analysed logarithmic returns was confirmed only in two cases (S&P500 and DAX), its influence on the volatility was proved for five logarithmic return series (NIKKEI, S&P500, DAX, JPY/EUR and JPY/USD).

Key words

logarithmic returns, conditional heteroscedasticity, TGARCH model

Kontaktné údaje

Ing. Michaela Chocholatá, PhD.
Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulta hospodárskej informatiky
Ekonomická univerzita v Bratislave
Dolnozemská cesta 1/b
852 35 Bratislava, SR
telefón: 00421-2-67295832
e-mail: chocholatam@yahoo.com

Statistical Analysis of Unemployment in Chosen Region of Poland in the Period of EU Convergence

Ladislav Mura

Ústav odborných predmetov, Dubnický technologický inštitút v Dubnici nad Váhom, Slovensko

Abstract

Treating regions of Poland as independent labour markets, the socio-economic inheritance of regions is found to be a legacy of planning that determines regional job reallocation rates. Situation on labour market in the Region Malopolska is perceived as favourable in comparison with the whole country. However, the market is not uniform and the variables characterising it reveal considerable regional and dynamic diversification. The paper attempts to state the causes of this phenomenon. Basing on time series describing changes of unemployment rates in years 1998 – 2004 in individual counties of the Malopolska region.

Key words

Statistical analysis, unemployment, Region of Malopolska, unemployment rate

Introduction

The Region Malopolska belongs to areas where unemployment rate is not relatively high; in the first quarter of 2004 it reached the level of 16.7%, which gave the province second position in the nationwide ranking. However, the region is not uniform in this respect, as considerable territorial diversification of unemployment indices is observed, they reach the lowest values of 8.4% in the urban county of Krakow and 9.7% in proszowicki county, whereas they are the highest in nowosadecki country – 30.7%, limanowski 25.3% and chrzanowski country – 21.2%. [4]

It is a widely-held view that large scale economic restructuring causes unemployment that may persist for some time. Turning to the case of Poland, the standard explanation of 1990s unemployment in Eastern Europe is that it reflects structural changes in labour demand caused by domestic economic reforms, direct foreign investment, and shifts in the pattern of international trade. [1]

The regional pattern of the unemployment that emerged in Poland in 1990 persisted, to a large extent, well beyond the middle of the decade. This persistence was a modest surprise. To reconcile a fairly stable regional pattern of unemployment with this explanation, one needs to add arguments why unemployment might persist. There are two main types of argument. Firstly, there are many reasons why restructuring and privatisation are gradual rather than all at once. This could give rise to a steady flow of mismatched workers into unemployment. [2]

Secondly, the persistence of mismatch unemployment may be reinforced by labour immobility caused by, for instance, adjustment costs in labour supply or wage rigidity. A combination of these theories creates a seemingly convincing story in which gradual restructuring and supply-side rigidities combine to create to persistence in the regional pattern of unemployment. This paper studies regional unemployment inequality in Poland. We find that higher unemployment regions are those experiencing greater change in industrial structure. We also find high unemployment regions are those with higher inflow rates to unemployment rather than longer spells of unemployment.

Present paper aimed at a statistical analysis of changes of unemployment rate in time, i.e. over the 1998 – 2004 period. Situation on the labour market is not easy to predict, since unemployment level is affected by factors of relatively fixed and known dynamics, such as demographic processes occurring in the country and factors which to some degree are predictable, although less stabile, including economic situation, and these connected with difficult to foresee decisions of regulatory bodies or organizational activities of large economic entities capable of influencing the situation on the labour market. Forecasting on the basis of time series, although always burdened with some error risk, is one of the basis econometric tools used by decision making bodies.

Material and methods

Time series is composed of a sequence of measurements of some variable registered at determined and identical time intervals. Advanced methods of analysis assume that observations y_t are realizations of random variables sequence Y_t. It justifies the random way in which the level of studied phenomena shapes. [3] Thus the series is understood as a random variables sequence $\{Y_t;\ t = 1,...,n\}$with determined joint (usually normal) distribution.

Analysis of time series has two main objectives:

- revealing the nature of phenomenon represented by a sequence of observations,
- forecasting or foreseeing future values of time series.

Both objectives require identification and description of the elements of series, which comprise:

- development tendency or trend,
- periodic fluctuations,
- fluctuations of economic situation,
- random fluctuations.

Development tendency is a property of the series revealing itself through systematic unidirectional changes (increase or decrease) of the level of studied phenomenon occurring over a long period of time. Regularity and long duration of these changes allow surmising that the reason of their occurrence is constant influence of some set of factors determined as main causes.

Periodic fluctuations are rhythmic changes in the level of studied variable with determined period of occurrence, which is usually one year (and then a half-year, quarters or months may be sub-periods). It is obvious that to make possible observation of some determined type of period fluctuations one needs relevant and detailed statistical data.

Fluctuations of economic situation are system, wave fluctuations of economy development observed over a period longer than one year. Therefore, analysis of fluctuations of economic situation requires many-year observations.

Information about the range of period fluctuations in a series is essential for predicting the development of phenomenon in the future. The values are measured by seasonality indices. The method of their computing depends on particular term presence in the series.

In a series where a distinct trend occurs, while constructing indices of seasonality, a comparison is carried out between the original series and equalized (smoothed) series representing the trend. Time series with considerable share of period and random fluctuations are subjected to the smoothing process. In result a new series is obtained with accentuated development trend of the studied phenomenon. Smoothing is connected with some forms of local data averaging, so that nonsystematic terms of individual observations cancel each other. The most popular technique of series equalizing (smoothing) bases on moving average. Original elements of series are replaced by an average of *k* neighbouring values (*k* is a width of smoothing window most frequently selected to fit the number of sub-periods conditioning periodic fluctuations).

Another method of eliminating periodic fluctuations and noise is exponential equalling. [5] Let us mark the elements of smoothed series as S_t. The procedure starts from determining the prerequisite, e.g. we assume:

$$S_1=y_1$$

We use the recursive formula for the subsequent terms of series:

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1} \quad (t = 2,\ldots,n)$$

Parameter $\alpha \in (0;1)$ is called smoothing constant and its value is set arbitrarily (in practice it usually assumes values about 0.8). The recursive procedure may be transformed to obtain the following formula:

$$S_t = \sum_{j=0}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^j y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} y_1 \quad (t = 2,\ldots,n)$$

Smoothed value S_t is a weighted mean of observations from the original series and the weights decrease in geometric progression when passing to older observations. Therefore older observations have less effect on smoothed value than younger ones.

At low value of constant α older observations, burdened with multidirectional fluctuations have relatively great influence on smoothing value S_t. On the other hand at high value of α the final one or several last observations definitely affect S_t. From this fact one may draw an important conclusion considering the value of smoothing constant. If a series is characterized by a big share of random fluctuations, a low value of α should be assumed for their elimination.

Otherwise, smoothed series would easily adjust itself to random fluctuations and the smoothing effect would be unsatisfactory. However, if the share of random fluctuations is small, a high value of smoothing constant should be assumed to express the phenomenon trend well [Joźwiak, Podgórski 2001]. In practice the best value of smoothing parameter may be sought (using methods available from statistical packages) through a "sample" process conducted at various values of α. The best parameter is the one at which the smallest possible value of mean square error is obtained *ex post* (it is mean square of difference between empirical values and forecasted for one period ahead).

While discussing a process of simple exponential smoothing it should be mentioned that the method also often provides accurate forecasts.

In studies on economic phenomena conducted using time series it is often reasonable to develop a mathematical model of the phenomenon trend. To do that analyses of linear and non-linear regressions are applied. Time variable is the independent variable in the model which is then named a development tendency model. Functions, most frequently used in models describing a phenomenon development tendency include: linear, exponential, power, polynominal and logistic functions. While selecting a type of function one should use a diagram of series and, if possible, also other than statistical information, i.e. well known economic laws and other regularities shaping the development of analysed phenomenon.

Information about periodic fluctuations in a series is crucial for forecasting the future development of a phenomenon. The values are measured by seasonality indices. The way in which they are computed depends on some particular terms presence in a series.

In a series where a distinct trend occurs, and such series are represented in the discussed studies, computations of seasonality indices are conducted using a comparison of original series with smoothed series representing the trend

In models including multiplicative fluctuations, individual seasonality indices are computed first for all terms y_t, where t crosses the moving average indices set. The indices assume the form of quotients $\frac{y_t}{\overline{\overline{y}}_t}$. Then raw indices of fluctuations are calculated according to the formula:

$$O_i' = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{t \in N_i} \frac{y_t}{\overline{\overline{y}}_t} \quad i = 1,2,..,d$$

On this basis cleaned indices of periodic fluctuations are constructed:

$$O_i = O_i^{'} \frac{d}{\sum_{i=1}^{d} O_i^{'}} \quad i = 1,2,\ldots,d$$

Then values of terms $(O_i - 1) \cdot 100\%$ inform by what percent the values of phenomenon observed in the *i*-th sub-period of a cycle are higher (or lower depending on the sign), due to seasonal fluctuations, than the level of a phenomenon represented by the trend.

In models with multiplicative fluctuations, first individual seasonality indices are calculated for all y_t terms, where *t* crosses the moving average indices set, (one of the methods described above is used for smoothing and to set the weight we assume that it is moving average method). The indices assume forms of quotients $\frac{y_t}{\overline{\overline{y}}_t}$. Then raw indices of seasonal fluctuations are calculated according to the following formula:

$$O_i^{'} = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{t \in N_i} \frac{y_t}{\overline{\overline{y}}_t} \quad i = 1,2,..,d$$

On this basis cleaned indices of periodic fluctuations are constructed:

$$O_i = O_i^{'} \frac{d}{\sum_{i=1}^{d} O_i^{'}} \quad i = 1,2,\ldots,d$$

Then values of terms $(O_i - 1) \cdot 100\%$ inform by which percent of value the phenomena observed in the *i*-th sub-period of cycle are higher (or lower depending on sign) due to seasonal fluctuations than the level of a phenomenon represented by the trend.

Seasonality indices allow eliminating seasonal fluctuations from the time series and the result may be obtained using transformations of terms from the original series:

$$\tilde{y}_t = \frac{y_t}{O_i} \quad for\ t \in N_i$$ for series with multiplicative fluctuations.

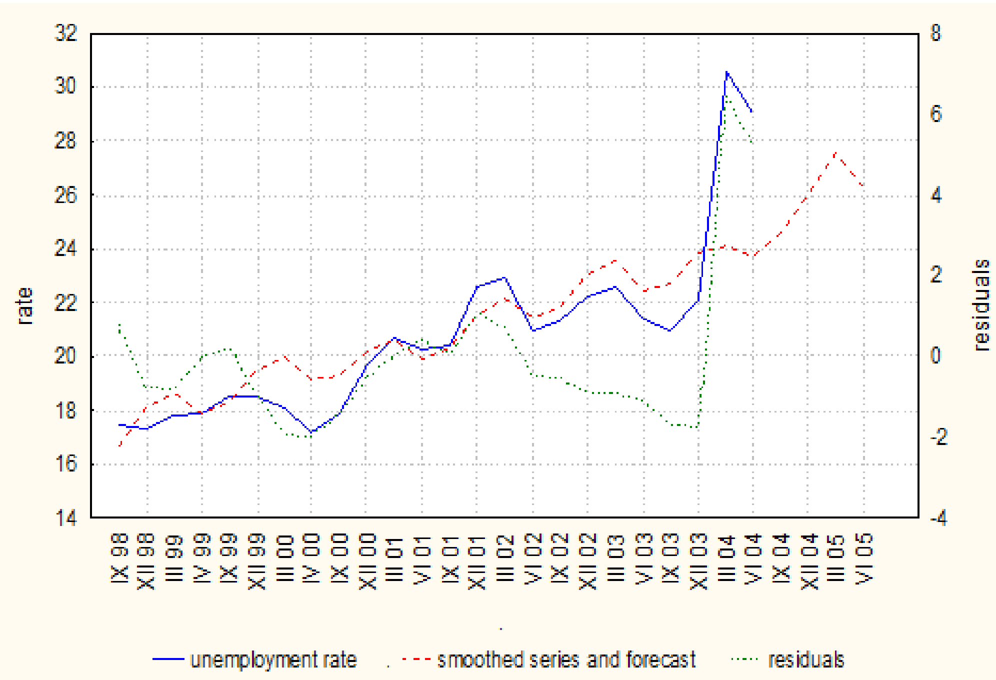
The series transformed in this way is determined by the phenomenon trend and random fluctuations. Then appropriate fitting procedures of trend function are applied for terms of $\tilde{y}_t$ series, which are usually based on the least squares method. Knowledge of measurements of seasonal fluctuations and trend function allows obtaining prognoses for future periods.

Result and discussion

On the basis of information supplied by the Provincial Labour Office in Krakow data were collected on unemployment rate estimated for individual countries of the Region Malopolska and for the total area of the province for the period from September 1998 to June 2004 at quarterly intervals. In this way 24-element time series were obtained. These were subjected to decomposition in order to separate their components, and then a forecast of unemployment rate level was prepared for the four subsequent periods (i.e. quarters). The series were subjected to exponential smoothing with parameter α=0.1 and to seasonal decomposition using Winters model with linear trend and seasonal fluctuations. The analysis was conducted using Statistica.pl 5.0. Due to a limited space of this work only some, i.e. the most interesting results will be presented.

Conducted analyses have demonstrated an apparently growing trend of the phenomenon. It is true for all countries and, which is understandable, is visible in a series of rates estimates for the whole province area (Figures 1-2). It is obviously divergent with the expectations of Polish government assuming simply an opposite tendency for this particular region.

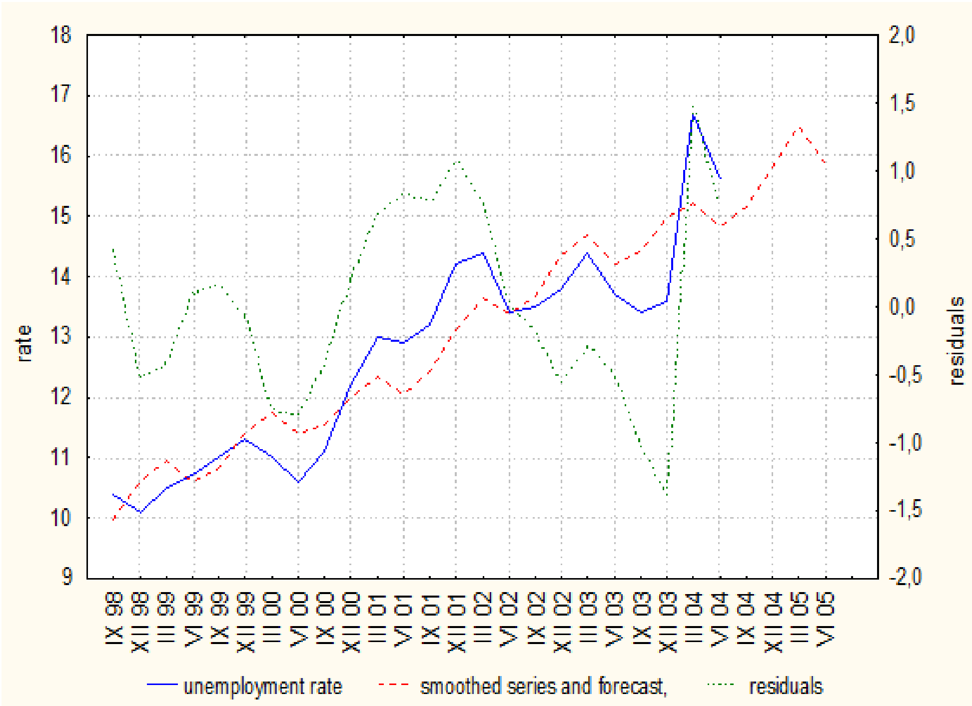
Fig. 1: Unemployment rate level in the Region Malopolska in 1998-2005



Source: own processing based on data from Provincial Labour Office in Krakow

Obtained series are characterized by a relatively high share of random fluctuations, which makes difficult inference and forecasting. The most serious were observed in January 2004 (Fig. 2), due to re-estimation of the unemployment level by the main Statistical Office, a considerable growth of this index was registered. Presently the unemployment rate considers also the results of last census, which revealed that far less persons are employed in national economy than hitherto estimated on the basis of census 1998 data. It concerns primarily persons employed on private farms. Therefore the biggest differences in the unemployment rate level are found in typically agricultural counties: nowosadecki (8.6% difference in relation to the previous period), in limanowski county (6.7%) and tarnowski county (5.9%).

Fig. 2: Unemployment rate level in nowosadeckie province in 1998-2005



Source: own processing based on data from Provincial Labour Office in Krakow

According to the developed forecasts, the highest unemployment rate level has been foreseen in nowosadecki country, respectively for the studied period from September 2004 to June 2005: 24.6%, 26.1%, 27.5%, 26.3% (Fig.2), whereas the lowest level has been expected for urban country of Krakow 9.5%, 9.7%, 10.1%.

Conclussion

This scientific paper leads us to conclusions about Poland and also some methodological points. On the case study of Poland we have shown that the persistent high unemployment of some region and countries is associated more with high inflows to unemployment than with high outflows. Situation on labour market in the Region Malopolska is perceived as favourable in comparison with the whole country. However, the market is not uniform and the variables characterising it reveal considerable regional and dynamic diversification. Beside the situation discussed in the work and connected with distorting effect, it may be noticed that changes of the described variable happened according to quite regular pattern, which was a connection of a linear upward trend of unemployment and slight seasonal fluctuations caused by periodic changes of employment level in construction and processing industry.

References

[1] ANDERSEN, P.K. – BORGAN, O. – GILL, R.D. – KEIDING, N.: *Statistical Models Based on Counting Processes*. New York: Springer–Verlag, 1993, s. 784. ISBN 978-0-387-94519-4

[2] JÓŹWIAK, J. – PODOGÓRSKI, J. *Statystyka od podstaw*. Wyd. 6 zmienione, PWE, Warszawa 2006, 65 s., ISBN 83-7252-167-0 2003 7.

[3] MURA, L. Štatistika zamestnanosti v samosprávnych krajoch vo vybraných odvetviach hospodárstva Slovenska. In: *Forum Statisticum Slovacum*, č. 4/2010, s. 130 – 135. ISSN 1336 – 7420. [online] [cit. 2011-04-20] Dostupné z WWW: http://www.ssds.sk/casopis/archiv/2010/fss0410.pdf

[4] Úrad práce vojvodstva Krakow. *Regionálna štatistika nezamestnanosti*. [online] [cit. 2011-04-10] Dostupné z WWW: http://wup-krakow.pl/malopolski-rynek-pracy/regionalna-polityka-rynku-pracy

[5] ZIELIŃSKI, Z. *Metody dynamiky i rytmicznośći zjawisk gospodarczych* PWN, Warszawa 1979, 37 s. ISBN 83-0100-79-23

Štatistická analýza nezamestnanosti vo vybranom regióne Poľska v období konvergencie do Európskej únie

Abstrakt

Riešenie problémov nezávislého trhu práce v jednotlivých regiónoch Poľska, ako i dedičstvo socio-ekonomických podmienok si vyžaduje plánovanie regionálnej miery zamestnanosti. Situácia na trhu práce v regióne Malopoľsko je vnímaná ako priaznivá v komparácii s celou krajinou. Avšak situácia na trhu práce v krajine nie je jednotná, keďže prostredníctvom premenných identifikujeme značné regionálne diferenciácie. Predkladaný článok sa pokúša uviesť príčiny tohto javu prostrednítvom štatistickej analýzy. Na podklade časových radov popisujeme zmeny miery nezamestnanosti v rokoch 1998 – 2004 v jednotlivých oblastiach regiónu Malopoľsko.

Klíčová slova

Štatistická analýza, nezamestnanosť, Malopoľský región, miera nezamestnanosti

Kontaktní údaje

Ing. et Bc. Ladislav Mura, Ph.D.
Ústav odborných predmetov, Dubnický technologický inštitút v Dubnici nad Váhom
Sládkovičova 533/20, 018 41 Dubnica nad Váhom, Slovensko
email: ladislav.mura@gmail.com

Veřejná správa, krizový management a jejich systémové souvislosti.

Pavel Zahradníček

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Abstrakt

Článek pojednává o krizovém managementu ve vazbě na veřejnou správu. Není polemikou o pojetí či vymezení managementu a o jeho funkcích. Jsou zde uvedeny skutečnosti, které zpravidla nejsou v literatuře příliš akcentovány a jsou pro pochopení systémových souvislostí rovněž důležité. Těžiště příspěvku leží v popisu modifikací managementu, které vytváří krizové prostředí. Transformuje jej do podoby managementu krizového. Článek je určen pro akademickou veřejnost a odborníky zabývající se krizovým řízením.

Klíčová slova

Veřejná správa; krizový management; krizové situace; charakteristika krizového managementu; zásady práce krizového managera.

Úvod

Počátek 21. století lze charakterizovat z obecného bezpečnostního pohledu dvěma protichůdnými trendy. Na straně jedné lze hovořit o oslabování silových konfrontačních přístupů států, na straně druhé o významném nárůstu nevojenských ohrožení. Bezpečnost státu a ochranu společnosti je tedy nezbytné vnímat komplexně, tj. zejména z pohledu politického, ekonomického, vojenského, vnitřní bezpečnosti a ochrany obyvatelstva atd.

Správa věcí veřejných, tj. výkon veřejných záležitostí ve společnosti organizované ve státě, se neobejde bez procesu udržování takového prostředí, ve kterém lze efektivně dosahovat vybraných cílů. Tento proces se nazývá řízení nebo management. Máme-li na mysli řešení krizových situací, pak hovoříme o krizovém řízení (managementu).

Krizové řízení tedy chápeme jako souhrn řídících činností věcně příslušných orgánů, zaměřených na analýzu a vyhodnocování bezpečnostních rizik, plánování, organizování, realizaci a kontrolu činností, prováděných v souvislosti s řešením krizové situace. Krizový management se stal součástí současného managerského prostředí. Zpravidla vyžaduje speciálně připravené specialisty - krizové managery.

Management a jeho modifikace v krizovém prostředí

Krizové situace a stavy jsou zákonitými průvodci konání člověka. Pochopení příčin vzniku krizových situací a jejich možných důsledků je jen prvním krokem na cestě k jejich řešení. Druhým krokem je vytvoření takových řídících mechanizmů, pomocí kterých lze krizové stavy nejen účinně ovlivňovat, ale i řídit.

Mezi základní úkoly managementu vždy patří:

1) minimalizace vstupů
2) maximalizace výstupů

Toto platí pro management obecně, nikoliv jen ve spojitosti s ekonomickou činností. Pro veřejnou správu je tento pohled významný.

Management musí veřejná správa v těchto souvislostech vnímat jako:

- nástroj optimalizace (lidských zdrojů, informačních zdrojů, atd.)
- system složený z institucí a řídících pracovníků, kteří se snaží dosáhnout maximální efekt z vazeb, vztahů a kompetencí daných legislativou
- mechanizmus (postupy, metodiky, nástroje atd.), pomocí kterého lze splnit plánované úkoly

Krizový management se z hlediska svých funkcí (plánování, organizace, personalistika, operativní řízení, kontrola) neodlišuje od obecného managenetu. Rozdíl je nutné spatřovat v obsahu, který je v případě krizového managementu formován jiným vnějším i vnitřním prostředím. Jiné jsou rovněž cíle, které je nezbytné dosáhnout.

Některé charakteristické znaky krizového managementu:

- krizový management ve veřejné správě funguje jako centrálně řízený systém (má prvky řídící a výkonné)
- řešení krizových situací i vlastní zásahy vyžadují centrální řízení (např. krizový štáb, IZS atd.)
- činnost záchranných akcí je koordinovaná z hlediska času, místa, sil, prostředků, technologie zásahu atd.
- pravomoci a zodpovědnost jsou legislativně zakotveny (krizové zákony)
- příkazy (rozkazy) se vyznačují jednoznačností
- činnost krizových orgánů a zasahujících složek je nepřetržitá
- dělba práce krizových štábů i jednotek je uspořádaná a účelná
- individuální zájmy jsou podřízeny zájmům společenským (veřejným)
- krizové štáby i zasahující jednotky jsou vedeny k disciplíně
- v týmech vládne jednotný duch a pocit sounáležitosti
- spravedlnost řídících pracovníků podporuje účinnost krizového managementu
- iniciativa je zpravidla umocňována nárůstem krizových faktorů
- atd.

Dílčí charakteristika veřejné správy ve vztahu ke krizovému managementu

Správou lze obecně rozumět soubor funkcí a souhrn činností, kterých cílem je rozvoj a zabezpečení věcí společného zájmu. Správa je tedy zvláštním druhem řídící činnosti systémů, přičemž zadavatel stojí zpravidla mimo systém. Řídící systémy stabilizují potřeby a výkony.

Správní systémy by měly přinášet reformy, změny, nové postupy atd. Obecné řídící systémy mají tedy především funkce stabilizační, správní systém funkce rozvojové.

Veřejná správa vykonávaná veřejnoprávními institucemi je vázaná příslušnou legislativou. Forma výkonu veřejnosprávní funkce se nazývá rozhodnutí.

Správu lze členit dvě základní formy:

- veřejnou správu (státní, samosprávu)
- soukromou správu

Rozdíl mezi veřejnou správou a soukromou správou tkví v:

- právní pozici vykonavatele správy
- cílech, které mají být dosaženy výkonem správy

Veřejnou správu je možné chápat jako souhrn metod, opatření, způsobů a postupů, které uvádí do chodu společensko-hospodářský mechanizmus a zabezpečují její regulaci. Veřejná správa je absolutně vázaná na právní systém státu.

Subjekty soukromé správy jsou právním řádem pouze omezovány a mohou jednat a používat i postupy, které nejsou legislativou přímo zakázané. Jak je tedy vidět, ve veřejné správě převažuje jednání normativní nad jednáním osobním.

Veřejná správa má chráněné postavení státem, což jí umožňuje být významnou organizátorskou silou, která zabezpečí plnění státem stanovených ekonomických, sociálních, politických a dalších úloh, včetně obrany a bezpečnosti občanů.

Veřejná správa ČR naplňuje požadavky subsidiarity a konkurenčního prostředí. V krizovém řízení však lze výše uvedná kritéria (požadavky) naplnit velice omezeně, neboť principy (znaky) krizového managementu toto téměř neumožňují.

Management veřejné správy přispívá a podílí se na zvyšování účinnosti a efektivnosti práce systému veřejné správy, např. takto:

- formulováním a dosahováním cílů správy
- racionalizací funkcí správy
- rozšiřováním a zkvalitňováním informační základny
- zvyšováním úrovně rozhodovacích procesů
- stimulováním lidí a zaváděním motivačních nástrojů
- zlepšením kontrolní činnosti
- zrychlením procesů správního řízení atd.

Pojetí a úloha krizového managementu

Konstatovali jsme, že člověk dokáže objasnit příčiny a zákonitosti převážné většiny krizí. Aby dokázal účinně ovlivnit preventivní činnost a minimalizoval následky krizových situací, bylo potřeba vytvořit specifický druh managemetu, který by se výše naznačenými problémy komplexně zabýval. Odborná literatura tedy hovoří o krizovém managementu, záchranném managementu a managementu rizik. Působnost krizového managementu zasahuje do všech součástí života společnosti (lidé, technologie, technika, životní prostředí atd.).

Zkoumáme-li metody, formy a nástroje krizového řízení, lze vyvodit že:

- systémově se ve značné míře prolíná se systémem veřejné správy
- řeší většinou úkoly správního charakteru, nikoliv úkoly hospodářské
- plní rozhodující část úkolů v období prevence, nikoli v čase krize

Krizový management je tedy nutné chápat jako:

- teoretický problém či disciplínu
- praktickou činnost
- zvláštní a specifickou činnost skupiny lidí (např. krizového štábu)
- schopnost (umění) řešit krizové stavy

Krizový management je také třeba vnímat jako interdisciplinární vědní obor. Předmětem zájmu (zkoumání) je především metodologie řízení některého systému v období krize.

Právě řízení systémů ve specifickém prostředí, zásadně odlišném od běžného správního či výrobního prostředí, to je ono specifikum krizového managementu.

Z funkčního pohledu jde o specifickou činnost řídícího subjektu, z institucionálního pohledu jde o soustavu institucí (pracovníků), které se zabývají problematikou krizového řízení a z pohledu teoretického jde o uspořádaný soubor poznatků o krizových situacích a jejich řešení.

Hlavní cíle krizového managementu:

1) posuzovat a analyzovat rizika a podmínky pro vznik krizových jevů
2) posuzovat varianty vývoje krizí
3) přijímat adekvátní řešení
4) dostat krizi pod kontrolu a minimalizovat ztráty

Hlavní úkoly krizového managementu:

1) provádění preventivních opatření a předcházení krizovým jevům
2) vytváření předpokladů pro řízení krizových situací
3) připravenost na zásah (řídících i výkonných složek systému)

Jaké markantní rozdíly lze najít při porovnání obecného managementu a krizového managementu?

Některé z nich:

- Vnější a vnitřní prostředí, ve kterém krizový management veřejné správy působí. Např. v krizovém managementu neexistují vztahy založené na tržním mechanizmu. Činnost krizových manažerů je svázaná legislativou, velikost finančních vstupů je závislá na státním rozpočtu, krizové řízení má donucovací charakter, práce krizových manažerů v období bez krizí se těžko obhajuje atd.
- Stanovení cílů pro krizový management. Cíle krizového managementu se dostávají do rozporu zejména s ekonomickými možnostmi státu na všech úrovních řízení státu. Prověřování dosažitelnosti cílů může být rovněž velice problematické atd.
- Pravomoci krizových manažerů. Autonomie v rozhodování a flexibilita je výrazně potlačena. Kompetence a zodpovědnost jsou přesně vymezeny. Pracuje se dle krizových plánů či scénářů.
- Personální práce v oblasti krizového managementu. Personální pravomoci jsou jasně vymezeny legislativou, hodnocení výkonu je složitější než v hospodářském managementu.
- Činnost krizového managenetu veřejné správy má odlišný charakter, rozsah a význam na jednotlivých stupních řízení veřejné správy a v jednotlivých obdobích řešení krizové situace. Je třeba rozlišit období přípravné, období řešení situace a období po skončení krize. Každé z těchto období má jasně definované cíle, úkoly a opatření.

Z výše naznačeného lze vyvodit některé zásady, kterými by se krizoví manageři měli řídit:

1) Vždy promyslet a naplánovat možné varianty řešení krizových jevů.
2) Být připraven na řešení nejhorší varianty.
3) Převzít iniciativu při řešení krizové situace.
4) Zabránit šíření paniky.
5) Přijímat opatření proti stupňování a šíření krize.
6) Každou krizovou situaci hodnotit z více aspektů.
7) V průběhu krize se zabývat pouze jejím řešením.
8) Mimořádnou pozornost věnovat spojení a získávání informací.
9) Informovat nadřízené, podřízené, sousedy a veřejnost.
10) Po ukončení krize okamžitě obnovit pohotovost sil i prostředků a systém monitorování.
11) Efektivnost činnosti krizového managementu mnohdy závistí na stupni ohrožení veřejnosti (paradoxně - čím větší problém, tím je krizový manager pro instituci či veřejnost potřebnější).
12) Uznávat zásadu, že každou krizi lze řídit.
13) Uznávat, že krize jsou součástí života soudobé společnosti.

Má-li veřejná správa svými krizovými orgány plnit výše zadané úkoly, pak je třeba, aby právní prostředí pro řešení krizí bylo komplexní, kvalitní a soudobé. Také personální výbava veřejné správy pro krizové řízení musí být velice kvalitní, měla by být řešena profesionálními krizovými managery.

Krizové řízení na všech stupních veřejné správy dále musí být zabezpečeno: strukturou řídících orgánů, výkonnými složkami, technickými prostředky, finančními prostředky. To vše v systémovém pohledu.

Závěr

Správa věcí veřejných, tj. výkon veřejných záležitostí ve společnosti organizované ve státě, se neobejde bez procesu udržování takového vnějšího i vnitřního prostředí řízeného systému, ve kterém lze efektivně dosahovat vybraných cílů. Charakter doby vymodeloval účelovou formu managementu tj. krizový management, který se stal nedílnou standardní součástí managerského prostředí.

Na rozdíl od obecného managementu jsou cíle, metody, formy a prostředky užívané v krizovém managementu pro řešení mimořádných situací ve značné míře jiné. Řízení systémů v nestandardním (krizovém) prostředí, tj. v prostředí zásadně odlišném od běžného správního či výrobního prostředí, to je ono specifikum krizového managementu. Některé systémové souvislosti jsou uvedeny právě v tomto příspěvku.

Literatura

[1] VEBER, J. a kol. *Management*. Praha: Management press, 2009. 734 s. ISBN 978-80-7261-200-0.

[2] HORÁK, R. a kol. *Průvodce krizovým řízením pro veřejnou správu*. Praha: Linde, 2004. 523 s. ISBN 80-7201-471-4

[3] REKTOŘÍK, J. *Krizový management ve veřejné správě, teorie a praxe*. Praha: Ekopress, 2004. 239 s. ISBN 80-86119-83-1

[4] URBAN, R. a kol. *Veřejná správa a její fungování v krizových situacích*. Brno: UO, 2008. 107 s. ISBN 978-80-7231-592-5

Public Service, Crisis Management and Their Systemic Connections

Abstract

The article discusses crisis management in relation to public service. It is not a controversy about conception or definition of management and its functions. There are some facts stated, that are in principle not accented in literature but are also important in order to understand some systemic connentions. The article centre *of gravity lies in description of modifications of management being transformed by crisis environment into crisis management.*

Key words

Public service; crisis management; crisis situation; characteristics of crisis management; principles of crisis manager´s work.

Kontaktní údaje

Doc. Ing. Pavel Zahradníček, CSc.
Vysoká škola polytechnická Jihlava
Katedra veřejné správy a regionálního rozvoje
e-mail: zahradnicek@vspj.cz

LOGOS POLYTECHNIKOS

Odborný recenzovaný časopis Vysoké školy polytechnické Jihlava, který svým obsahem reflektuje zaměření studijních programů VŠPJ. Tematický je zaměřen do oblastí společenskovědních a technických. Jednotlivá čísla jsou úžeji vymezená.

Časopis vychází 4x ročně v nákladu 150 výtisků

Šéfredaktor: doc. PhDr. Martin Hemelík, Ph.D.

Odpovědní redaktoři tohoto čísla:
RNDr. Marie Hojdarová, CSc. (matematika)
Ing. Libuše Měrtlová, Ph.D. (krizový management)
Ing. Ladislav Šiška, Ph.D. (ekonomie)

Editor: Bc. Magda Malenová (komunikace s autory a recenzenty)

Technické zpracování: Ondřej Chalupa, DiS.

Web editor: Jitka Kalabusová

Pokyny pro autory a deklarovaná forma příspěvků jsou dostupné na
http://www.vspj.cz/tvurci-cinnost/casopisy-vspj/logos-polytechnikos

Zasílání příspěvků
Redakce přijímá příspěvky v českém, slovenském nebo světovém jazyce elektronicky na adrese logos@vspj.cz

Adresa redakce:
Vysoká škola polytechnická Jihlava, Tolstého 16, 586 01 Jihlava

Distribuce: časopis je dostupný v elektronické podobě na webových stránkách školy. V omezeném množství jej lze vyžádat zdarma na adrese redakce.

Vydání: září 2011

RECENZENTI ČÍSLA 3/2011
(DO ELEKTRONICKÉHO VYDÁNÍ DOPLNĚNO 15. 3. 2016)

Ing. Šárka Dvořáková, Ph.D. (Česká zemědělská univerzita v Praze)
RNDr. Anna Hejlová, Ph.D. (Česká zemědělská univerzita v Praze)
prof. Ing. Jiří Herynk, CSc. (Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně)
doc. Ing. Milan Houška, Ph.D. (Česká zemědělská univerzita v Praze)
doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc. (Vysoké učení technické v Brně)
Ing. Alena Klapalová, Ph.D. (Masarykova univerzita v Brně)
RNDr. Petr Kučera, Ph.D. (Česká zemědělská univerzita v Praze)
doc. Mgr. Jiří Málek, Ph.D. (Vysoká škola ekonomická Praha)
Ing. Petr Minařík (Mendelova univerzita v Brně)
Ing. Jan Murárik (Univerzita Palackého v Olomouci)
doc. Ing. Petr Pirožek, Ph.D. (Vysoká škola ekonomické v Praze)
Ing. Stanislava Půlpánová, Ph.D. (Vysoká škola ekonomické v Praze)
Ing. Jan Pour (Vysoká škola ekonomická v Praze)
Ing. Jan Přikryl, CSc. (Univerzita Karlova v Praze)
prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc. (Slezská univerzita v Opavě)
prof. Jindřich Soukup (Vysoká škola ekonomická v Praze)
doc. Ing. Karel Tomšík, PhD. (Česká zemědělská univerzita v Praze)
Ing. Růžena Vintrová, DrSc. (Vysoká škola ekonomie a managementu)
doc. Ing. Marek Zinecker, Ph.D. (Vysoké učení technické v Brně)